

Motor Stirling Tipo Alfa Bicilíndrico

Elaboración de Modelo Dinámico

Valdez, P.E. ⁽¹⁾, Scollo, L.S. ⁽²⁾, Santamarina, S.R. ⁽¹⁾ Chini, M.R. ⁽¹⁾ y Barón, J.H. ⁽³⁾

⁽¹⁾ Grupo de Energía Solar - Inst.CEDIAC - Fac. Ingeniería-Universidad Nacional de Cuyo, Centro Universitario, Parque General San Martín, CC 405, 5500, Mendoza, Argentina.

⁽²⁾ CONICET. Grupo de Energía Solar - Inst.CEDIAC - Fac. Ingeniería-Universidad Nacional de Cuyo, Centro Universitario, Parque General San Martín, CC 405, 5500, Mendoza, Argentina.

⁽³⁾ Fac. Ingeniería-Universidad Nacional de Cuyo, Centro Universitario, Parque General San Martín, CC 405, 5500, Mendoza, Argentina
pvaldez@cediac.uncu.edu.ar

Resumen - El presente trabajo expone la realización del modelo dinámico de un motor Stirling tipo alfa bicilíndrico. El modelo permite estudiar el comportamiento de dicho dispositivo en forma teórico-experimental para evaluar principalmente las variables mecánicas del sistema. Además ofrece la posibilidad de optimizar el diseño de pistones, cigüeñal, bielas, volante de inercia y así mejorar las pérdidas de potencia por fricción.

Palabras Claves: Modelo dinámico, Stirling, Energía solar, Simulación

INTRODUCCIÓN

Maquinas de ciclo Stirling. Métodos de diseño y simulación

Las máquinas de ciclo Stirling tienen aplicación en motores, generadores, equipos combinados de generación térmica y eléctrica, equipos de refrigeración y bombas de calor. En estos dispositivos el ciclo Stirling tiene ventajas respecto a otros ciclos ya que permite utilización de fuentes de energía alternativas y no utiliza refrigerantes dañinos para el ambiente.

En la bibliografía pueden encontrarse diversos modelos de simulación. Sin embargo, la mayoría de ellos se ocupa de la parte termodinámica y no de su vinculación con la parte mecánica (Thomas, 2011, Urieli. 2011, Martini, 1983). Sin embargo, Chin-Hsiang Cheng (Chin-Hsiang Cheng et al., 2011) ha presentado recientemente un modelo que tiene en cuenta esta vinculación y permite ver de una forma más completa el desempeño del equipo. Por otro lado, en Saravia y otros (Saravia et al., 2007) también se presenta un modelo que tiene en cuenta las variables mecánicas en el modelo.

El modelo aquí presentado utiliza el mismo enfoque global que el de Cheng (Chin-Hsiang Cheng et al., 2011), pero aplicado a un motor alfa bicilíndrico tipo V-90.

DESARROLLO DEL TRABAJO

1 - Nomenclatura y subíndices

<u>Variables y unidades de medida:</u>	<u>Subíndices:</u>
α - aceleración angular (rad/s ²)	1 - Pistón del cilindro de expansión
β - ángulo entre la biela y el eje de su pistón (rad)	2 - Pistón del cilindro de compresión
θ - ángulo que forma el cigüeñal respecto del eje del pistón de expansión (rad)	3 - Articulación cigüeñal-bielas
	4 - Articulación biela-pistón compresión
τ - tiempo (s)	4-3 - Biela del cilindro de compresión
ω - velocidad angular (rad/s)	5 - Articulación biela-pistón expansión

Variabes y unidades de medida:	Subíndices:
a_p - velocidad lineal del pistón (m/s)	5-3 - Biela del cilindro de expansión
d_t - paso de tiempo (s)	c - compresión
F - fuerzas actuantes en pistón y biela de expansión (N)	$c2$ - cilindro de compresión
g - aceleración gravitatoria [9,81 m/s ²]	ca - cárter
G - fuerzas actuantes en pistón y biela de compresión (N)	ci - carga inicial
I - momento de inercia (kg . m ²)	cig - cigüeñal
L - largo de la biela (m)	cil - cilindro
L_p - largo del pistón (m)	$e1$ - cilindro de expansión
m - masa (kg)	f - fricción
N - potencia (W)	G - centro de masa de la biela
P - presión (Pa)	h - calentador
Q - calor intercambiado (J)	k - enfriador
R - radio (m)	n - dirección del eje de la biela
R_{gas} - constante del gas helio (J °K/kg)	p - pistón
T - torque (N . m)	q - carga
t - temperatura	r - regenerador
T_c - temperatura del foco frío (°K)	t - dirección perpendicular al eje de la biela
T_h - temperatura de foco caliente (°K)	tan - dirección tangencial
V - volumen (m ³)	
v_p - velocidad lineal del pistón (m/s)	
W - peso (N)	
W_o - trabajo (J)	
x - dirección del eje del cilindro	
x_p - posición del pistón (m)	
y - dirección perpendicular al eje del cilindro	

Variable	Valor	Variable	Valor
θ (i)	$3\pi/2$	Reil	0,038
ω (i)	89	Rgas	2078,6
14-3	0,00172	tc	300
15-3	0,00172	te	816
L	0,153	th	816
Lpc	0,0695	tk	300
Lpe	0,1596	Vc2 (i)	3,109 E-4
m1	0,6022	Vca	2,380 E-3
m2	0,2587	Ve1 (i)	3,109 E-4
m4-3	0,39	Vh	6,631E-5
m5-3	0,39	Vk	7,297E-5
Pci	3,70E5	Vr	1,343 E-4
Rcig	0,0338		

Tabla I - Valores adoptados para este modelo. (i)= valor inicial

2 - Modelo termodinámico

En esta sección se presenta un modelo termodinámico simplificado, desarrollado con el fin principal de tener un sustento para utilizar el modelo mecánico del siguiente apartado.

Para calcular las masas existentes en cada parte de la máquina, se utiliza la presión de carga inicial y las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 m_c &= P_{ci} \cdot V_{c2} / (R_{gas} \cdot t_c) \\
 m_k &= P_{ci} \cdot V_k / (R_{gas} \cdot t_k) \\
 m_r &= P_{ci} \cdot V_r / (R_{gas} \cdot t_r) \\
 m_h &= P_{ci} \cdot V_h / (R_{gas} \cdot t_h) \\
 m_e &= P_{ci} \cdot V_{e1} / (R_{gas} \cdot t_e)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

y la masa total m es la suma de todas las anteriores, por lo que se puede obtener la misma a medida que el motor avanza:

$$m = \frac{P}{R_{gas}} \left(\frac{V_{c2}}{t_c} + \frac{V_{e1}}{t_e} + \frac{V_k}{t_k} + \frac{V_r}{t_r} + \frac{V_h}{t_h} \right)
 \tag{2}$$

y despejando P,

$$P = \frac{m \cdot R_{gas}}{\left(\frac{V_c}{t_c} + \frac{V_e}{t_e} + \frac{V_k}{t_k} + \frac{V_r}{t_r} + \frac{V_h}{t_h} \right)}
 \tag{3}$$

y como simplificación se considera $P = P_{e1} = P_{c2}$.

El volumen total se calcula como

$$V = V_{c2} + V_{e1} + V_r + V_k + V_h
 \tag{4}$$

y si el cambio de volumen es negativo, se calcula el calor transferido en el intercambiador de compresión y a la vez el trabajo de compresión; si resulta positivo, se calculan dichos valores para la expansión. Utilizando diferencias finitas:

$$Q = -W_o = P \cdot \Delta V
 \tag{5}$$

3 - Modelo dinámico

En la Fig. 1 se encuentra esquematizado un motor Stirling tipo alfa. Los dos pistones se encuentran desfasados un ángulo $\pi/2$. El ensamblado de los intercambiadores es como se muestra en la Fig. 1.

Se supone que las bielas se unen al cigüeñal en un radio R_{cig} , y a un ángulo R_{cig} desde el eje del cilindro de expansión.

Para esta primera versión del modelo se realiza la suposición de intercambiadores ideales, por lo cual la temperatura de la pared del Calentador y del Cilindro de expansión son iguales a T_h , y la del Enfriador y Cilindro de compresión a T_c . Para los cálculos, se coloca el centro de gravedad de las bielas en la mitad de su

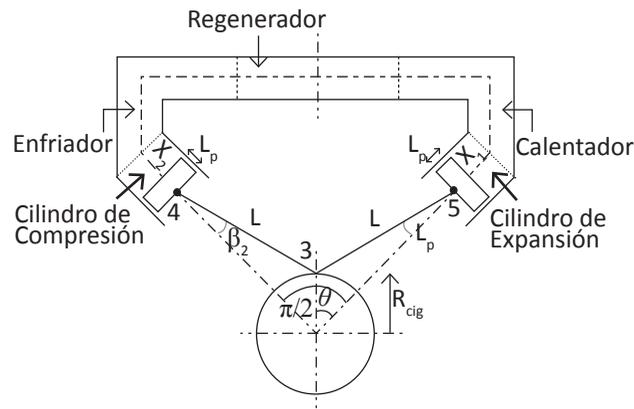


Fig. 1 - Esquema del motor Stirling tipo alfa

longitud, y todos los cuerpos a considerar son rígidos. La potencia se entrega en el eje, y se obtendrá desde las fuerzas actuantes en pistones y bielas.

La posición del pistón de compresión sigue una función:

$$x_{p1} = L_p + L \cos(\beta_1) + R_{cig} \cos \theta \tag{6}$$

y la del pistón:

$$x_{p2} = L_p + L \cos(\beta_2) + R_{cig} \sin \theta \tag{7}$$

donde

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{R_{cig}}{L} \sin \theta\right) \tag{8}$$

y

$$\beta_2 = \arcsin\left(\frac{R_{cig}}{L} \cos \theta\right) \tag{9}$$

El volumen del cilindro de expansión se calcula como:

$$V_{e1} = \left[L(1 - \cos \beta_1) + R_{cig}(1 - \cos \theta) \right] \pi R_{e1}^2 \tag{10}$$

y el volumen del cilindro de compresión:

$$V_{c2} = \left[L(1 - \cos \beta_2) + R_{cig}(1 - \sin \theta) \right] \pi R_{c2}^2 \tag{11}$$

Derivando las ecuaciones (6) y (7) se obtienen las velocidades lineales de los pistones,

$$v_{p1} = -L\omega_{5-3} \sin \beta_1 - R_{cig} \omega \sin \theta \quad (12)$$

y

$$v_{p2} = -L\omega_{4-3} \sin \beta_2 - R_{cig} \omega \cos \theta \quad (13)$$

donde

$$\omega_{5-3} = \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\omega R_{cig} \cos \theta}{L \cos \beta_1} \quad (14)$$

y

$$\omega_{4-3} = \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\omega R_{cig} \sin \theta}{L \cos \beta_2} \quad (15)$$

correspondientemente. Siendo ω la velocidad angular del volante de inercia y la derivada respecto del tiempo de θ .

Para obtener las aceleraciones, se derivan las ecuaciones (12) y (13):

$$a_{p1} = -L\omega_{5-3}^2 \cos \beta_1 - L\alpha_{5-3} \sin \beta_1 - R_{cig} \omega^2 \cos \theta - R_{cig} \alpha \sin \theta \quad (16)$$

$$a_{p2} = -L\omega_{4-3}^2 \cos \beta_2 - L\alpha_{4-3} \sin \beta_2 - R_{cig} \omega^2 \sin \theta - R_{cig} \alpha \cos \theta \quad (17)$$

siendo

$$\alpha_{5-3} = \frac{R_{cig}}{L \cos \beta_1} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta + \omega \omega_{5-3} \tan \beta_1 \cos \theta) \quad (18)$$

$$\alpha_{4-3} = \frac{R_{cig}}{L \cos \beta_2} (-\alpha \sin \theta - \omega^2 \cos \theta + \omega \omega_{4-3} \tan \beta_2 \sin \theta) \quad (19)$$

donde α es igual a $d\omega/dt$.

A continuación se analizan las fuerzas y torques actuantes sobre el pistón y la biela en el sistema de expansión. Para ello se utiliza el esquema de la Fig. 2.

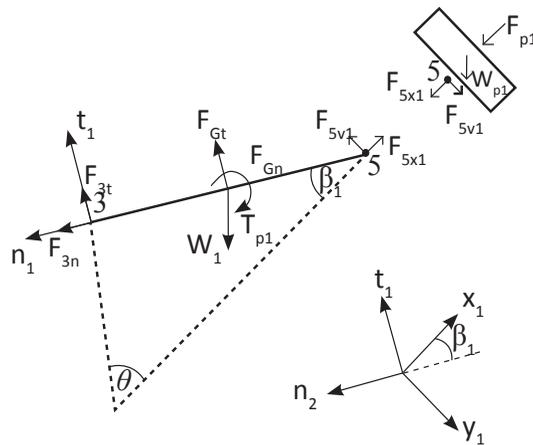


Fig. 2 - Esquema dinámico de biela y pistón de expansión

Se utilizan dos sistemas de referencia conveniente, el x - y fijo al pistón (trasladante) y el n - t fijo a la biela (rotante-trasladante).

Las ecuaciones de equilibrio propuestas en la figura anterior son: de torque,

$$\sum T_3 = -T_{p1} + \frac{L}{2} F_{Gt} + LF_{5y} \sin \beta_1 + LF_{5x} \cos \beta_1 - \frac{L}{2} W_1 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta_1 \right) = 0 \quad (20)$$

en la dirección n_1 ,

$$\sum F_n = -F_{Gn} + F_{3n} - F_{5y} \cos \beta_1 + F_{5x} \sin \beta_1 + W_1 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \beta_1 \right) = 0 \quad (21)$$

y en la dirección t_1 ,

$$\sum F_t = -F_{Gt} + F_{3t} - F_{5y} \sin \beta_1 + F_{5x} \cos \beta_1 + W_1 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta_1 \right) = 0 \quad (22)$$

de las cuales es posible obtener F_{5x} , F_{3n} y F_{3t} , los demás términos son:

$$\begin{aligned} T_{p1} &= I_{2-3} \alpha_{2-3} \\ F_{p1} &= \pi r_{el}^2 (P_{e1} - P_{ca}) \\ F_{5y} &= -F_{p1} - W_{p1} + m_{p1} a_{p1} \\ F_{Gn} &= \frac{1}{2} L m_{5-3} \omega_{5-3}^2 \\ F_{Gt} &= \frac{1}{2} L m_{5-3} \alpha_{5-3} \\ W_1 &= m_{5-3} \cdot g \\ W_{p1} &= m_{p1} \cdot g \end{aligned} \quad (23)$$

Del conjunto de ecuaciones (23) vale destacar F_{p1} que es la fuerza ejercida por el gas sobre el pistón, como diferencia de la presión en el cilindro y la existente en el cárter. Las mismas son obtenidas a partir del modelo termodinámico. Ahora es posible calcular la fuerza tangencial que este conjunto ejerce en el cigüeñal:

$$F_{tan} = F_{3n} \sin(\beta_1 + \theta) + F_{3t} \cos(\beta_1 + \theta) \tag{24}$$

De modo que el torque aportado por este conjunto al sistema motor es:

$$T_1 = F_{tan} \cdot R_{cig} \tag{25}$$

El balance de fuerzas y torques del conjunto de compresión se puede ver en la Fig. 3.

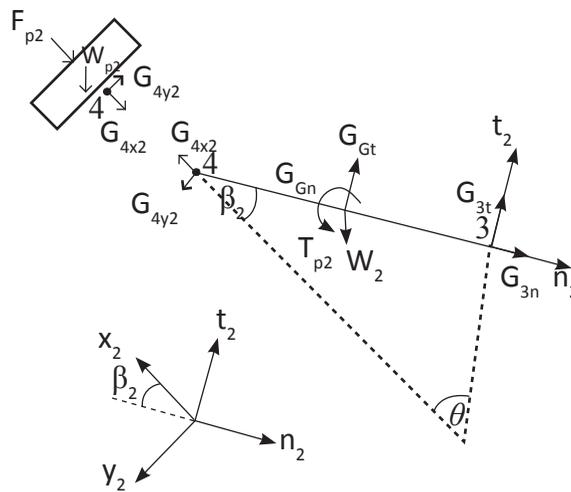


Fig. 3 - Esquema dinámico de biela y pistón de compresión

El análisis es similar al anterior, la expresión para los torques es:

$$\sum T_3 = T_{p2} - \frac{L}{2} G_{Gt} - L G_{4y} \sin \beta_2 + L G_{4x} \cos \beta_2 + \frac{L}{2} W_1 \sin \left(3 \frac{\pi}{4} + \beta_2 \right) = 0 \tag{26}$$

para la dirección n_2 ,

$$\sum G_n = -G_{Gn} + G_{3n} - G_{4y} \cos \beta_2 - G_{4x} \sin \beta_2 + W_2 \cos \left(3 \frac{\pi}{4} + \beta_2 \right) = 0 \tag{27}$$

y para la dirección t_2 ,

$$\sum G_t = -G_{Gt} + G_{3t} - G_{4y} \sin \beta_2 - G_{4x} \cos \beta_2 + W_2 \sin \left(3\frac{\pi}{4} + \beta_2 \right) = 0 \quad (28)$$

de las cuales es posible obtener F_{4x} , G_{3n} y G_{3t} , los demás términos son:

$$\begin{aligned} T_{p2} &= I_{4-3} \alpha_{4-3} \\ F_{p2} &= \pi r_{c2}^2 (P_{c2} - P_{ca}) \\ G_{4y} &= -F_{p2} - W_{p2} + m_{p2} a_{p2} \\ G_{Gn} &= \frac{1}{2} L m_{4-3} \omega_{4-3}^2 \\ G_{Gt} &= \frac{1}{2} L m_{4-3} \alpha_{4-3} \\ W_2 &= m_{4-3} \cdot g \\ W_{p2} &= m_{p2} \cdot g \end{aligned} \quad (29)$$

La fuerza tangencial que ejercen la biela y el pistón de compresión sobre el cigüeñal es:

$$G_{\tan} = G_{3n} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \beta_2 \right) + G_{3t} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \beta_2 \right) \quad (30)$$

A partir de la expresión anterior, es posible hallar el torque con que contribuye el conjunto de compresión como

$$T_2 = G_{\tan} \cdot R_{cig} \quad (31)$$

Para tener en cuenta la fricción, se utiliza la curva de potencia perdida por fricción en función de la velocidad angular obtenida en [6]:

$$N_f = 3 \times 10^7 \cdot \left(\frac{30}{\pi} \omega \right)^{3,0154} \quad (32)$$

Así, el torque de fricción tiene la expresión:

$$T_f = \frac{N_f}{\omega} = 3 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{30}{\pi} \right)^{3,0154} \cdot \omega^{2,0154} \quad (33)$$

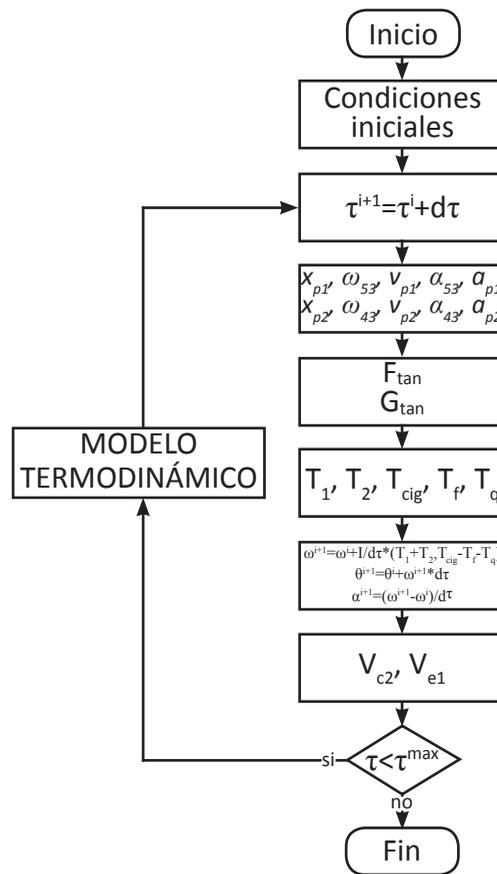


Fig. 4 - Diagrama de flujo del modelo

Otros torques a tener en cuenta son: el de carga, dado por el mecanismo que se le acople (de aquí en adelante se considera cero), y el del cigüeñal,

$$T_{cig} = I_{cig} \cdot \alpha \tag{34}$$

Considerando un momento de inercia I para el volante, la ecuación resultante es

$$I \frac{d\omega}{dt} = T_1 + T_2 + T_{cig} - T_f - T_q \tag{35}$$

De esta expresión es posible actualizar la velocidad angular. En la Fig. 4, se muestra el diagrama de flujo del programa.

RESULTADOS

El modelo se hizo correr con MATLAB. En la Fig. 5 se observa la evolución de la velocidad angular en el tiempo para distintos valores de momentos de inercia en el volante (6 kg.m^2 ; $0,6 \text{ kg.m}^2$; $0,06 \text{ kg.m}^2$), con una velocidad angular inicial de 850 rpm.

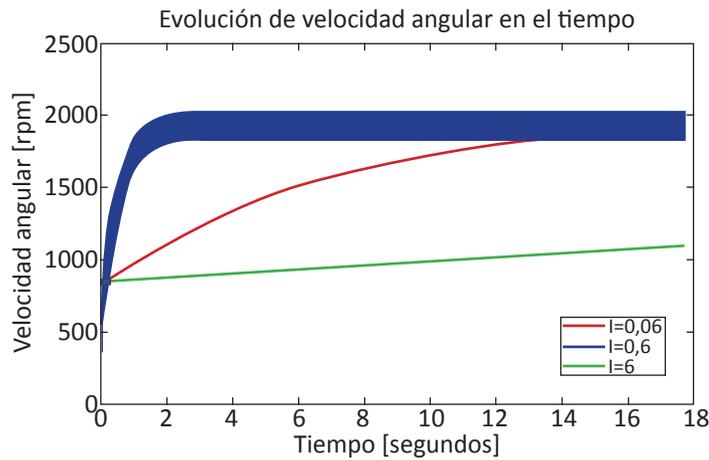


Fig. 5 - Velocidad angular en función del tiempo para distintos momentos de inercia

La gráfica para menores inercias no se muestra pues, en esos casos, la velocidad angular cae rápidamente, demostrando que el motor no funciona para ese conjunto de valores $I-\omega$ inicial.

A mayores inercias la velocidad angular se establece luego de un tiempo mayor, pero la amplitud de ω es menor, lo cual representa una mejor marcha. En todos los casos, la velocidad angular promedio a la que tienden las gráficas es de 1900 rpm.

En la Fig. 6 se muestra la gráfica resultante de la velocidad angular en función del tiempo para un momento de inercia de 0,06 kg.m² y distintas velocidades angulares iniciales (1500 rpm y 2500 rpm).

Para velocidades iniciales inferiores a 850 rpm, la velocidad angular decae rápidamente y por ello no se muestra en la figura. Por arriba de la misma, independientemente del valor de la velocidad de arranque, puede verse que ω se estabiliza nuevamente en un valor medio 1900 rpm. Las amplitudes, luego del transitorio, son también iguales.

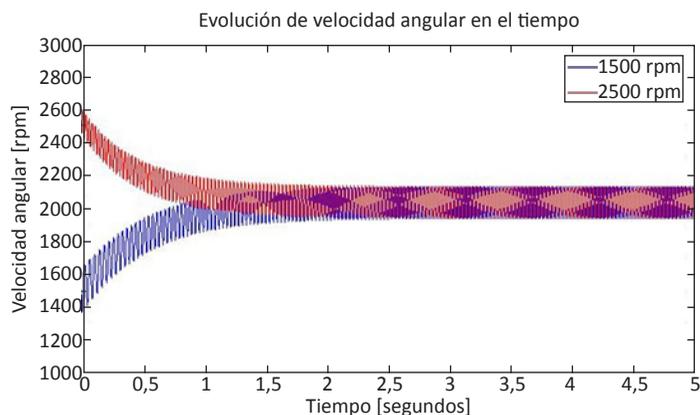


Fig. 6 - Velocidad angular en función del tiempo para distintas velocidades de arranque

CONCLUSIONES

El proceso de elaboración del modelo ha permitido un mejor conocimiento del sistema y sus vinculaciones. El modelo termodinámico utilizado es básico, de tipo isotérmico, cuyos resultados son semejantes al conocido

análisis de Schmidt. La simpleza del mismo permitió evaluar si el modelo mecánico se comportaba adecuadamente, y ésto hace posible, ya comprobada la parte mecánica, agregarle mejoras en el modelo termodinámico de manera que sus resultados se acerquen cada vez más a los resultados reales y las predicciones sean cada vez más fidedignas.

La próxima versión de este modelo podrá resolver la influencia en el rendimiento, potencia y velocidad angular de variables como el peso de pistones, bielas, cigüeñal vinculadas a pérdidas de carga en el flujo, pérdidas de calor de los intercambiadores y eficiencia del regenerador.

REFERENCIAS

Thomas, PROSA, Software for evaluation of Stirling Cycle machines, Fachhochschule, http://userserv.hochschule-reutlingen.de/~thomas/prosa_direct.html, 2011.

Urieli, Stirling Cycle Machine Analysis, Apuntes de cátedra, Dept of Mechanical Engineering, Ohio University, <http://www.ent.ohiou.edu/~urieli/stirling/me422.html>, 2011.

Martini, Stirling Engine Design Manual, 2da ed, NASA, US Department of Energy, 1983.

Chin-Hsiang Cheng, Ying-Ju Yu, Dynamic simulation of a beta-type Stirling engine with cam-drive mechanism via the combination of the thermodynamic and dynamic models. *Renewable Energy* 36, 714-725, 2011.

Saravia, Alía de Saravia, Echazú y Alcorta, La simulación de sistemas termomecánicos solares con el programa Simusol, el motor Stirling: simulación y construcción, *Avances en energías renovables y ambiente*. 11, 2007.

Scollo, Valdez, Fritsch y Barón, Avances en el desarrollo y construcción de máquinas de ciclo Stirling, *Avances en energías renovables y ambiente*, 13, 2009.