

## Convivencia Ortogonal de Señales Analógicas Moduladas

Pedro E. Danizio<sup>1</sup>, Víctor H. Sauchelli<sup>1</sup>, Alejandro D. Danizio<sup>1</sup>, Eduardo R. Danizio<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Córdoba. Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria. Casilla de Correo 36 - (X5016ZAA) Córdoba. (0351) 468-4215 / 468-4006 / 468-4317, pdanizio@gmail.com

<sup>2</sup> Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Villa María Av. Universidad 450 - (X5900) - Villa María - Córdoba. (0353) 453-7500 / 01

**Resumen-** En el presente trabajo se analiza la convivencia de dos bandas base diferentes moduladas en amplitud con la misma frecuencia de portadora que se mantienen sin correlación por ser las portadoras ortogonales entre sí por la diferencia de fase entre ambas.

Se realiza un análisis en un proceso Modem (Modulación-Demodulación) con enfoque no periódico, demostrando la recuperación por separado de ambas bandas base con detección sincrónica. A continuación se muestra la simulación del proceso mencionado con dos bandas base diferentes armadas con tres componentes de frecuencia distintas en cada una, concluyendo que éstas conviven ortogonalmente en la misma técnica de AM y son recuperadas correlacionándolas con detección sincrónica.

**Palabras claves:** ortogonal, bandas base, portadora, amplitud modulada, modem

**Abstract -** This paper analyzes the coexistence of two different base bands modulated in amplitude with the same carrier frequency, which remain uncorrelated being the carriers orthogonal each other, due to the phase difference between them.

An analysis in a process modem (modulation-demodulation), by using a no-periodic approach, is performed in order to demonstrate the synchronic recovery of each separated base band. Next, the mentioned process simulation is shown, by using two different base bands developed with three different frequency components on each one; concluding that the last coexist orthogonally in the same AM technique and recovered by synchronous detection correlation.

**Keywords:** orthogonal, base bands, amplitude modulation, modem

### INTRODUCCIÓN

En el estudio de las técnicas de modulación analógicas el concepto de que dos bandas base con informaciones diferentes pueden ser moduladas sobre portadoras de la misma frecuencia, ortogonalizadas entre sí por la diferencia de fase, resulta algo dificultoso para la comprensión de los estudiantes de grado (Strembler, 1997, Lathi, 1989, Couch, 1998). Por ello como material de apoyo a la enseñanza (Danizio, 2009) de las comunicaciones analógicas se desarrolló el presente trabajo.

### DE LA ORTOGONALIDAD

Dadas dos señales  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  analizadas en la concepción de vectores en espacios  $k$  dimensionales, se puede definir en forma "canónica" (esto es adaptando la definición para cada caso) (Oppenheim, 1998, Sauchelli, 2004) como producto escalar de estos vectores en un intervalo de tiempo,  $(ta, tb)$  a:

$$\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = \int_{ta}^{tb} f_1(t) f_2(t) dt \quad (1)$$

A veces se lo divide por el intervalo  $1/(tb-ta)$ , pero insistimos que ésta es una definición canónica.

Si el producto escalar de dos vectores con magnitudes diferentes de cero es nulo, son perpendiculares.

Si este producto escalar es nulo y no lo son permanentemente las señales en el intervalo de tiempo se dice que las señales son ortogonales; linealmente independientes.

Además si las señales son periódicas y poseen un período común  $T$ , puede adoptarse como intervalo de tiempo un período. Las señales son ortogonales si se cumple que:

$$\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = \int_0^T f_1(t) f_2(t) dt = 0 \quad (2)$$

Cuando se trata de señales aleatorias en procesos ergódicos, (los promedios conjuntos coinciden con los temporales) (Couch, 1998) se suele adoptar el coeficiente de correlación cruzada (que es lo que se conoce) en un intervalo  $T$ , como:

$$R_{1,2}(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (3)$$

Dos señales ortogonales pueden ocupar el mismo espacio energético sin mezclarse. Esto se puede lograr ortogonalizando por diferentes acciones: a) por codificación de palabras códigos ortogonales entre sí, b) mediante portadoras de igual frecuencia con fases corridas  $90^\circ$  entre ellas, moduladas en la misma técnica, c) también con la misma portadora utilizando diferentes técnicas de modulación.

En este trabajo adoptamos como portadoras dos señales de igual frecuencia y defasadas  $90^\circ$  entre ellas, una como cosenoidal y la otra senoidal, (Oppenheim, 1998, Sauchelli, 2004) que se mantienen ortogonales tal como se muestran a continuación:

$$\langle \cos(\omega_c t), \sin(\omega_c t) \rangle = \int_0^t \cos(\omega_c t) \sin(\omega_c t) dt = 0 \quad (4)$$

lo que permite modularlas con la misma técnica y dos bandas base diferente ya que se extiende la ortogonalidad a las señales moduladas. Para ésto comenzaremos el análisis modulando en amplitud ambas portadoras con dos bandas base diferentes. El proceso MoDem, (Danizio, 2009) se muestra en la Fig.1.

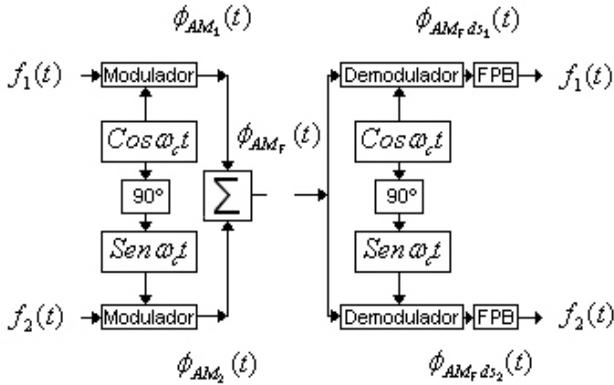


Fig. 1 - Diagrama en bloques del proceso Modem

En el proceso de modulación (Mo.) las expresiones son las siguientes:

La primera banda base con la portadora cosenoidal en tiempo y frecuencia, se muestra a continuación en tiempo (5) y frecuencia (6).

$$\Phi_{AM_1}(t) = (A+f_1(t)).\text{Cos}\omega_c t \tag{5}$$

$$\Phi_{AM_1}(\omega) = A\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)] + \frac{1}{2} [F_1(\omega+\omega_c)+F_1(\omega-\omega_c)] \tag{6}$$

La segunda banda base con la portadora senoidal en tiempo y frecuencia, se muestran en tiempo (7) y en frecuencia (8).

$$\Phi_{AM_2}(t) = (A+f_2(t)).\text{Sen}\omega_c t \tag{7}$$

$$\Phi_{AM_2}(\omega) = A_c \pi j[\delta(\omega+\omega_c) - \delta(\omega-\omega_c)] + j \frac{1}{2} [F_2(\omega+\omega_c)-F_2(\omega-\omega_c)] \tag{8}$$

La suma de ambas señales da como resultante una composición espectral de dos señales que ocupan el mismo espacio espectral pero conviviendo ortogonalmente:

$$\begin{aligned} \Phi_{AM_F}(t) &= \Phi_{AM_1}(t) + \Phi_{AM_2}(t) = \\ &= (A+f_1(t))\text{Cos}\omega_c t + (A+f_2(t))\text{Sen}\omega_c t \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{AM_F}(\omega) &= A \pi[\delta(\omega+\omega_c) + \delta(\omega-\omega_c)] + \\ &+ \frac{1}{2} [F_1(\omega+\omega_c) + F_1(\omega-\omega_c)] + \\ &+ A \pi j[\delta(\omega+\omega_c) - \delta(\omega-\omega_c)] + \\ &+ j \frac{1}{2} [F_2(\omega+\omega_c) - F_2(\omega-\omega_c)] \end{aligned} \tag{10}$$

En el proceso de demodulación (Dem) se utilizará la detección sincrónica, es decir por reinyección (Couch, 1998, Danizio, 2009) de portadora, buscando correlar con la portadora en la fase que le corresponda. Para la obtención de la banda base 1 se debe multiplicar  $\Phi_{AM_F}(t)$  por  $\text{Cos}\omega_c t$  y para la segunda banda base,  $\Phi_{AM_F}(t)$  se multiplica por  $\text{Sen}\omega_c t$ .

En ambos casos se obtiene una componente continua, la banda base y la misma señal inicial pero en segunda armónica. Luego con un FPB se deja pasar la banda base y se puede eliminar la componente continua.

Para la banda base 1 será:

$$\begin{aligned} \Phi_{AM_Fds_1}(t) &= \\ &= \{(A+f_1(t))\text{Cos}\omega_c t + (A+f_2(t))\text{Sen}\omega_c t\}\text{Cos}\omega_c t \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{AM_Fds_1}(t) &= \frac{A}{2} + \frac{f_1(t)}{2} + \\ &+ \frac{A}{2} \text{Cos}2\omega_c t + \frac{f_1(t)}{2} \text{Cos}2\omega_c t + \\ &+ \frac{A}{2} \text{Sen}2\omega_c t + \frac{f_2(t)}{2} \text{Sen}2\omega_c t \end{aligned} \tag{12}$$

Luego del FPB, con ganancia unitaria se obtiene la primera banda base  $f_1(t)$ . Para la banda base 2 será:

$$\begin{aligned} \Phi_{AM_Fds_2}(t) &= \\ &= \{(A + f_1(t))\text{Cos}\omega_c t + [A + f_2(t)]\text{Sen}\omega_c t\}\text{Sen}\omega_c t \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{AM_Fds_2}(t) &= \frac{A}{2} + \frac{f_2(t)}{2} - \\ &- \frac{A}{2} \text{Cos}2\omega_c t - \frac{f_2(t)}{2} \text{Cos}2\omega_c t + \\ &+ \frac{A}{2} \text{Sen}2\omega_c t + \frac{f_1(t)}{2} \text{Sen}2\omega_c t \end{aligned} \tag{14}$$

Luego del FPB, con ganancia unitaria se obtiene la segunda banda base  $f_2(t)$ . De tal manera que se produce el proceso MoDem con dos portadoras en la misma frecuencia y diferentes fases, moduladas en AM con dos bandas base diferentes que se ortogonalizan por la diferencia de fase de las portadoras. La recuperación se logra mediante la detección sincrónica, que equivale a la

correlación de la estructura de entrada con cada una de las portadoras reinyectadas en la fase correspondiente.

En cuanto al ancho de banda de la señal modulada resultante es el doble de la banda base de mayor ancho, ya que es una señal de AM (Couch, 1998).

### DE LA SIMULACIÓN

Lo expresado se muestra en simulación utilizando dos bandas base diferentes entre sí, formadas por la suma de tres componentes con diferentes amplitudes.

La portadora será de 100 KHz con 1 V de amplitud en coseno y seno.

La primera banda base se forma por componentes de 15, 10 y 5 KHz, con amplitudes 500, 300 y 200 mV, respectivamente tal como se ve en la (15).

$$f_1(t) = 0,5\text{Cos}2\pi 15.10^3t + 0,3\text{Cos}2\pi 10^4t + 0,2\text{Cos}2\pi 5.10^3t \quad (15)$$

La representación en tiempo y frecuencia se ve en las Figs. 2 (tiempo) y 3 (frecuencia).

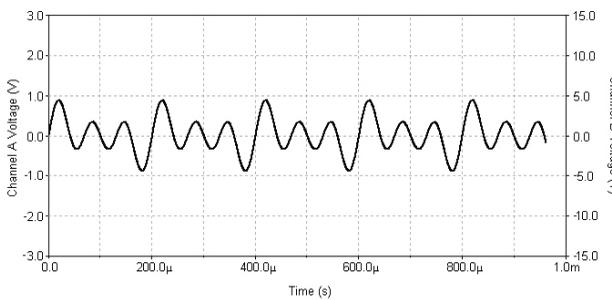


Fig. 2 - Representación temporal de la Banda base uno formada por tres componentes de 5, 10 y 15 KHz

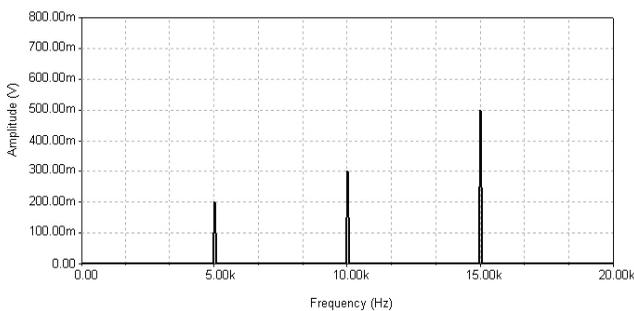


Fig. 3 - Representación espectral de la Banda base uno formada por tres componentes de 5, 10 y 15 KHz

La segunda banda base se forma por componentes de 12, 7 y 4 KHz, con amplitudes 500, 300 y 200 mV respectivamente, tal como se ve en la (16).

$$f_2(t) = 0,5\text{Cos}2\pi 12.10^3t + 0,3\text{Cos}2\pi 7.10^3t + 0,2\text{Cos}2\pi 4.10^3t \quad (16)$$

La representación en tiempo y frecuencia se ve en las Figs. 4 (tiempo) y 5 (frecuencia).

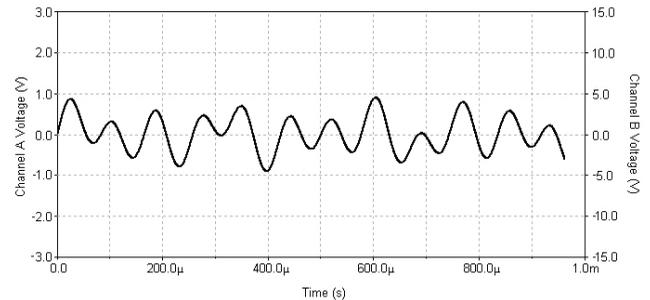


Fig. 4 - Representación temporal de la Banda base dos formada por tres componentes de 4, 7 y 12 KHz

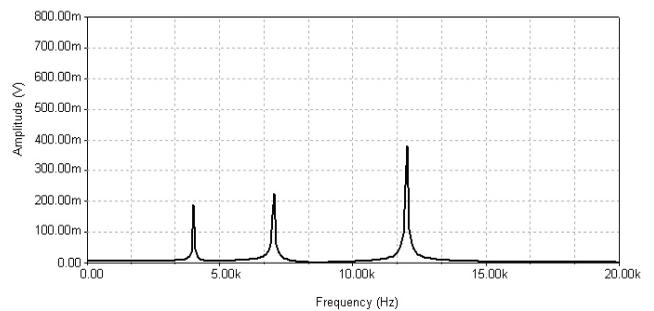


Fig. 5- Representación espectral de la Banda base dos formada por tres componentes de 4, 7 y 12 KHz

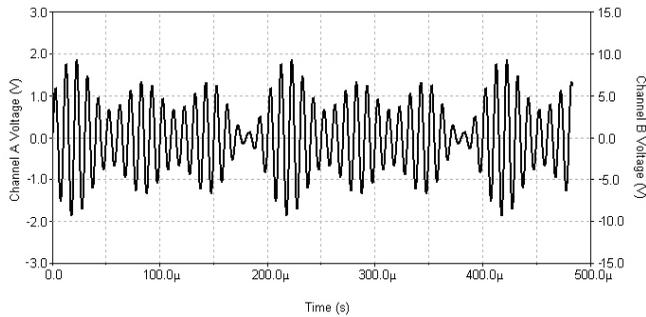
La primera señal modulada en coseno será

$$\phi_{AM_1}(t) = (1 + 0,5\text{Cos}2\pi 15.10^3t + 0,3\text{Cos}2\pi 10.10^3t + 0,2\text{Cos}2\pi 5.10^3t)\text{Cos}2\pi 10^5t \quad (17)$$

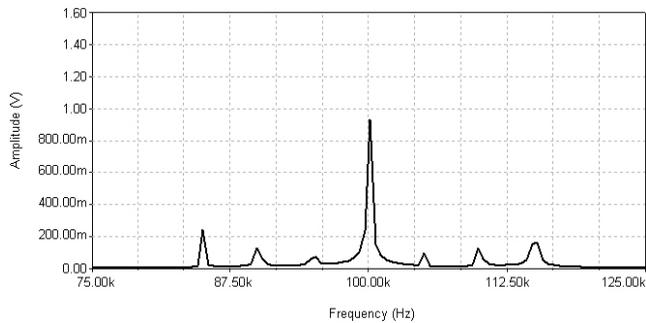
Resolviendo (17) nos queda:

$$\phi_{AM_1}(t) = \text{Cos}2\pi 10^5t + 0,25\text{Cos}2\pi 115.10^3t + 0,25\text{Cos}2\pi 85.10^3t + 0,15\text{Cos}2\pi 110.10^3t + 0,15\text{Cos}2\pi 90.10^3t + 0,1\text{Cos}2\pi 105.10^3t + 0,1\text{Cos}2\pi 95.10^3t \quad (18)$$

Cada banda lateral está formada por las tres componentes a ambos lados de la portadora de 100 KHz, tal como se ve en las Figs. 6 en tiempo y 7 en frecuencia.



**Fig. 6 -** Representación temporal de la portadora cosenoidal modulada en AM por la banda base uno



**Fig. 7 -** Representación espectral de la portadora cosenoidal modulada en AM por la banda base uno

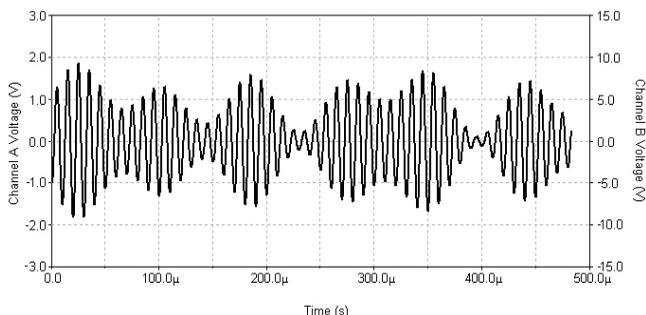
La segunda señal modulada en seno será:

$$\begin{aligned} \varnothing_{AM_2}(t) = & (1 + 0,5\text{Cos}2\pi \cdot 12 \cdot 10^3 t + \\ & + 0,3\text{Cos}2\pi \cdot 7 \cdot 10^3 t + \\ & + 0,2\text{Cos}2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 t)\text{Sen}2\pi \cdot 10^5 t \end{aligned} \quad (19)$$

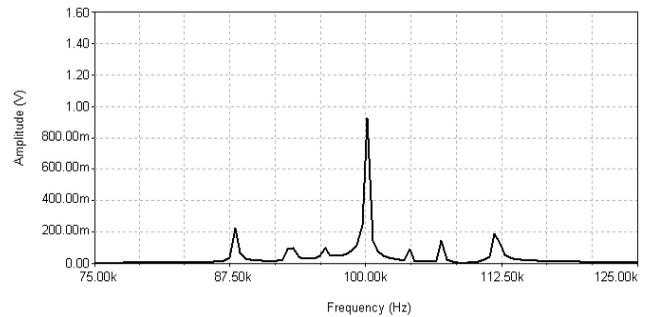
Resolviendo (19) queda:

$$\begin{aligned} \varnothing_{AM_2}(t) = & \text{Sen}2\pi 10^5 t + \\ & + 0,25\text{Sen}2\pi 112 \cdot 10^3 t + 0,25\text{Sen}2\pi 88 \cdot 10^3 t + \\ & + 0,15\text{Sen}2\pi 107 \cdot 10^3 t + 0,15\text{Sen}2\pi 93 \cdot 10^3 t + \\ & + 0,1\text{Sen}2\pi 104 \cdot 10^3 t + 0,1\text{Sen}2\pi 96 \cdot 10^3 t \end{aligned} \quad (20)$$

Cada banda lateral está formada por las tres componentes a ambos lados de la portadora de 100 KHz, tal como se ve en las Figs. 8 en tiempo y 9 en frecuencia.



**Fig. 8 -** Representación temporal de la portadora senoidal modulada en AM por la banda base dos



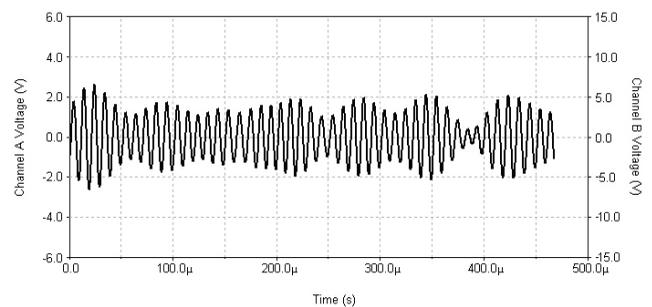
**Fig. 9 -** Representación espectral de la portadora senoidal modulada en AM por la banda base dos

La señal resultante de la suma de ambas tendrá dos bandas laterales con todas las componentes conviviendo ortogonalmente.

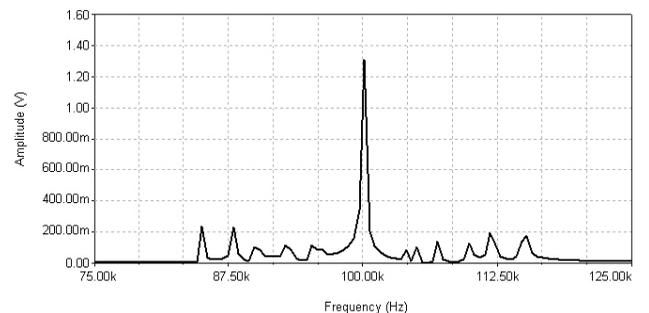
$$\varnothing_{AM_F}(t) = \varnothing_{AM_1}(t) + \varnothing_{AM_2}(t) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varnothing_{AM_F}(t) = & (1 + 0,5\text{Cos}2\pi 15 \cdot 10^3 t + \\ & + 0,3\text{Cos}2\pi 10 \cdot 10^3 t + 0,2\text{Cos}2\pi 5 \cdot 10^3 t)\text{Cos}2\pi 10^5 t + \\ & + (1 + 0,5\text{Cos}2\pi 12 \cdot 10^3 t + \\ & + 0,3\text{Cos}2\pi 7 \cdot 10^3 t + 0,2\text{Cos}2\pi 4 \cdot 10^3 t)\text{Sen}2\pi 10^5 t \end{aligned} \quad (22)$$

La señal se ve en las Figs. 10 en tiempo y 11 en frecuencia.



**Fig. 10 -** Representación temporal de la señal resultante de la suma de las dos portadoras moduladas en AM



**Fig. 11 -** Representación espectral de la señal resultante de la suma de las dos portadoras moduladas en AM

En el proceso de demodulación (Dem) se utiliza la detección sincrónica la  $\varnothing_{AM_F}(t) = \varnothing_{AM_1}(t) + \varnothing_{AM_2}(t)$  debe ser multiplicada por la portadora en Coseno y Seno respectivamente.

$$\varnothing_{AM_{Fds_1}}(t) = [\varnothing_{AM_1}(t) + \varnothing_{AM_2}(t)]\text{Cos}\omega_c t \quad (23)$$

$$\varnothing_{AM_{Fds_2}}(t) = [\varnothing_{AM_1}(t) + \varnothing_{AM_2}(t)]\text{Sen}\omega_c t \quad (24)$$

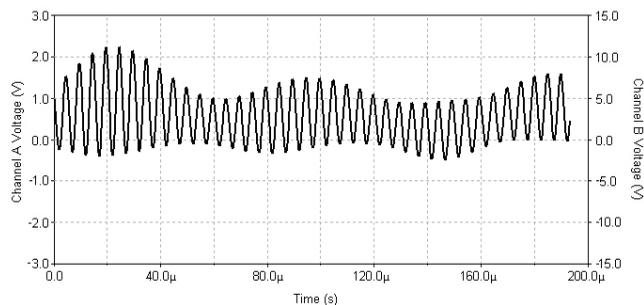
Desarrollando la (23), nos queda:

$$\begin{aligned} \varnothing_{AM_{Fds_1}}(t) = & (1 + 0,5\text{Cos}2\pi 15.10^3 t + \\ & + 0,3\text{Cos}2\pi 10.10^3 t + 0,2\text{Cos}2\pi 5.10^3 t)\text{Cos}^2 2\pi 10^5 t + \\ & + (1 + 0,5\text{Cos}2\pi 12.10^3 t + \\ & + 0,3\text{Cos}2\pi 7.10^3 t + 0,2\text{Cos}2\pi 4.10^3 t)\text{Sen}2\pi 10^5 t \text{Cos}2\pi 10^5 t \end{aligned} \quad (25)$$

Resolviendo la (25), obtendremos:

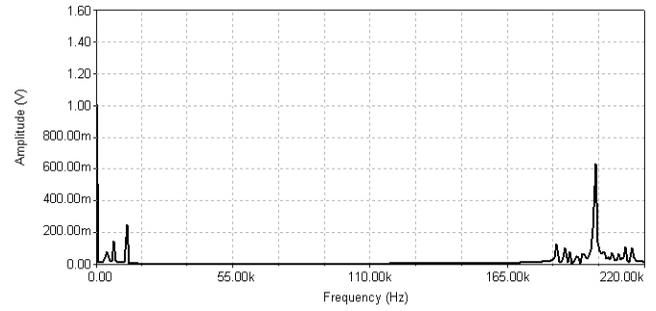
$$\begin{aligned} \varnothing_{AM_{Fds_1}}(t) = & \frac{1}{2} + 0,5\text{Cos}2\pi 15.10^3 t + \\ & + 0,3\text{Cos}2\pi 10^4 t + 0,2\text{Cos}2\pi 5.10^3 t + \\ & + \frac{1}{2} \text{Cos}2\pi 2.10^5 t + \\ & + 0,125\text{Cos}2\pi 215.10^3 t + 0,125\text{Cos}2\pi 185.10^3 t + \\ & + 0,075\text{Cos}2\pi 210.10^3 t + 0,075\text{Cos}2\pi 190.10^3 t + \\ & + 0,05\text{Cos}2\pi 205.10^3 t + 0,05\text{Cos}2\pi 195.10^3 t + \\ & + \frac{1}{2} \text{Sen}2\pi 2.10^5 t + \\ & + 0,125\text{Sen}2\pi 212.10^3 t + 0,125\text{Sen}2\pi 188.10^3 t + \\ & + 0,075\text{Sen}2\pi 207.10^3 t + 0,075\text{Sen}2\pi 193.10^3 t + \\ & + 0,05\text{Sen}2\pi 204.10^3 t + 0,05\text{Sen}2\pi 196.10^3 t \end{aligned} \quad (26)$$

Se obtiene entonces la Banda Base y la misma  $\varnothing_{AM_F}(t)$  en segunda armónica, es decir en 200 KHz. La  $\varnothing_{AM_{Fds_1}}(t)$  se observa en la Fig. 12 en el tiempo y en la 13 en frecuencia.



**Fig.12 -** Representación temporal de la detección sincrónica correlada con portadora cosenoidal, para obtener la banda base uno

Para recuperar la banda base 1 es necesario filtrar, y si suponemos que el filtro tiene ganancia unitaria se obtendrá la señal original y una componente continua.



**Fig.13 -** Representación espectral de la detección sincrónica correlada con portadora cosenoidal para obtener la banda base uno

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + 0,5\text{Cos}2\pi 15.10^3 t + \\ & + 0,3\text{Cos}2\pi 10^4 t + 0,2\text{Cos}2\pi 5.10^3 t + \\ & + \frac{1}{2} \text{Cos}2\pi 10^5 t \end{aligned} \quad (27)$$

Si se elimina la continua se obtiene la misma señal original tal como se ve en las Figs. 3 y 4.

Resolviendo la (27):

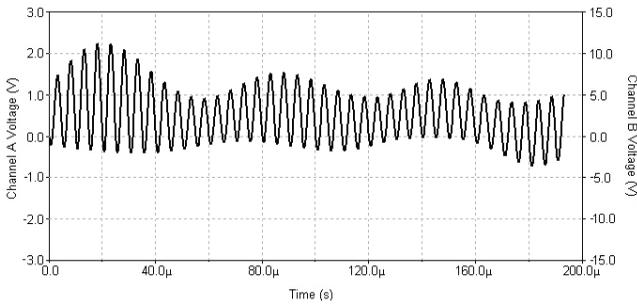
$$\begin{aligned} \varnothing_{AM_{Fds_2}}(t) = & (1 + 0,5\text{Cos}2\pi 15.10^3 t + \\ & + 0,3\text{Cos}2\pi 10.10^3 t + 0,2\text{Cos}2\pi 5.10^3 t). \\ & \text{Cos}2\pi 10^5 t.\text{Sen}2\pi 10^5 t + \\ & + (1 + 0,5\text{Cos}2\pi 12.10^3 t + \\ & + 0,3\text{Cos}2\pi 7.10^3 t + 0,2\text{Cos}2\pi 4.10^3 t). \\ & \text{Sen}^2 2\pi 10^5 t \end{aligned} \quad (28)$$

Resolviendo y ordenando la (28), obtendremos:

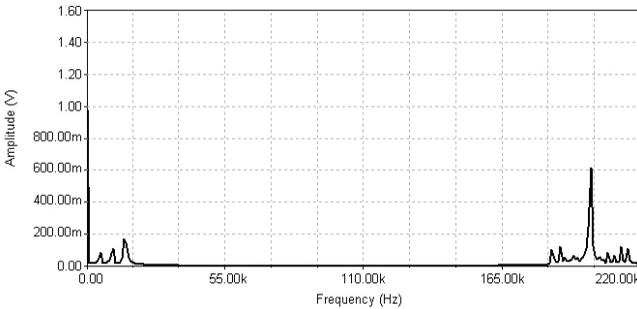
$$\begin{aligned} \varnothing_{AM_{Fds_2}}(t) = & \frac{1}{2} + 0,5\text{Cos}2\pi 12.10^3 t + \\ & + 0,3\text{Cos}2\pi 7.10^3 t + 0,2\text{Cos}2\pi 4.10^3 t + \\ & + \frac{1}{2} \text{Cos}2\pi 2.10^5 t - \\ & - 0,125\text{Cos}2\pi 212.10^3 t + 0,125\text{Cos}2\pi 188.10^3 t - \\ & - 0,075\text{Cos}2\pi 207.10^3 t + 0,075\text{Cos}2\pi 193.10^3 t - \\ & - 0,05\text{Cos}2\pi 204.10^3 t + 0,05\text{Cos}2\pi 196.10^3 t + \\ & + \frac{1}{2} \text{Sen}2\pi 2.10^5 t + \\ & + 0,125\text{Sen}2\pi 215.10^3 t + 0,125\text{Sen}2\pi 185.10^3 t + \\ & + 0,075\text{Sen}2\pi 210.10^3 t + 0,075\text{Sen}2\pi 190.10^3 t + \\ & + 0,05\text{Sen}2\pi 205.10^3 t + 0,05\text{Sen}2\pi 195.10^3 t \end{aligned} \quad (29)$$

Se obtiene entonces la Banda Base y la misma  $\varnothing_{AM_F}(t)$  en segunda armónica, es decir en 200 KHz.

La  $\varnothing_{AM_{Fds_2}}(t)$  se observa en las Figs. 14 en tiempo y 15 en frecuencia.



**Fig. 14 -** Representación temporal de la detección sincrónica correlada con portadora senoidal para obtener la banda base dos



**Fig. 15 -** Representación espectral de la detección sincrónica correlada con portadora senoidal para obtener la banda base dos

Para recuperar la banda base 2 es necesario filtrar, y si suponemos que el filtro tiene ganancia unitaria se obtendrá la señal original y una componente continua:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + 0,5 \cos 2\pi 12 \cdot 10^3 t + \\ & + 0,3 \cos 2\pi 7 \cdot 10^3 t + \\ & + 0,2 \cos 2\pi 4 \cdot 10^3 t \end{aligned} \quad (30)$$

Si se elimina la continua se obtiene la misma señal original tal como se ve en las Figs. 5 y 6.

### CONCLUSIONES

El proceso Modem con dos portadoras en la misma frecuencia y diferente fase moduladas en AM con dos bandas base diferentes, permite la convivencia ortogonal de ambas ya que se ortogonalizan por la diferencia de fase de las portadoras.

La recuperación, de cada una de las bandas base se logra mediante la detección sincrónica que equivale a la correlación de la estructura de entrada con cada una de las portadoras reinyectadas en la fase correspondiente.

En cuanto al ancho de banda de la señal modulada resultante es el doble de la banda base de mayor ancho, ya que es una señal de AM.

### REFERENCIAS

- Strembler, “Introducción a los Sistemas de Comunicación”. 3ª Edición. Addison-Wesley; 219-232, (1997).
- Lathi, “Introducción a la Teoría y Sistemas de Comunicación”. 1ª Edición. Limusa. 169-179, (1989).
- Couch II León, “Sistemas de Comunicación Digitales y Analógicos”. 5ª Edición. Prentice-Hall. 295-302, (1998).
- Danizio Pedro, “Teoría de las Comunicaciones”. 4ª Edición. Universitas. 48-60, (2009).
- Oppenheim, Alan – Willsky, Alan – Nawad, Hamid, “Señales y Sistemas” 2ª Edición. Prentice Hall. 67-89 (1998).
- Sauchelli, Víctor: “Teoría de Señales y Sistemas Lineales”. 1ª edición. Universitas. 34-45 (2004).