

Aproximación a la Expansión de Espectro por Cuasi Muestreo

Pedro E. Danizio¹, Víctor H. Sauchelli¹, Eduardo R. Danizio², Alejandro D. Danizio¹

¹ Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Córdoba. Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria. Casilla de Correo 36 (X5016ZAA) Córdoba. (0351) 468-4215 / 468-4006 / 468-4317, pdanizio@gmail.com

² Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Villa María Av. Universidad 450 - (X5900) Villa María – Córdoba. (0353) 453-7500 / 01

Resumen - La señal resultante del muestreo tiene una composición espectral que incluye la señal original y de esa manera es posible recuperar la señal original con la ayuda de un filtro pasa bajo. El muestreo real usa una función de pulsos periódica que se convoluciona en frecuencia con la señal a muestrear y da como resultado la repetición del espectro de la muestreada sobre las componentes de la muestreadora. De hecho que todo se valida en el teorema si la señal muestreadora, aparte de tener una frecuencia adecuada, tiene componente continua.

La pregunta que surge es ¿qué ocurre si ésta no tiene componente continua?. La respuesta es que se obtiene solamente expansión de espectro y la recuperación de la señal original. Se debe realizar con la despansión del espectro volviendo a multiplicar de manera temporal la señal con la función de muestreo sin continua.

Palabras clave: muestreo, expansión de espectro, despansión, modulación

Abstract - Sampling the resultant signal has a spectral composition that includes the original signal can thus recover the original signal with the aid of a low pass filter. The actual sampling pulse using a periodic function that is convolved with the signal frequency to be sampled and results in the repetition of the spectrum of the sampled components on the sampler. In fact everything in the theorem is valid if the signal sampler, apart from having a proper frequency, has continuous component. The question is what happens if this does not have DC component?

The response is only obtained spectrum expansion and recovery of the original signal must be performed with the spectrum re-despansión temporarily multiply the signal with the sampling function without continuous.

Keywords: sampling, spread spectrum, despansión, modulation

INTRODUCCIÓN

El muestreo de señales es un aspecto muy importante para la digitalización de la información.

El teorema del muestreo demuestra que la frecuencia de muestreo debe ser por lo menos el doble de la máxima frecuencia a muestrear (Strembler 1997, Lathi 1989, Couch II 1998).

La señal resultante del muestreo tiene una composición espectral que incluye la señal original y de esa manera es posible recuperar la señal original con la ayuda de un filtro pasa bajo (entre otros métodos).

El muestreo real usa una función de pulsos periódica que se convoluciona en frecuencia con la señal a muestrear y da como resultado la repetición del espectro de la muestreada sobre la frecuencia fundamental y sus armónicas de la muestreadora (Danizio 2009, Oppenheim 1998, Sauchelli 2004).

De hecho el teorema parte de una señal muestreadora que tiene componente continua y su frecuencia fundamental por lo menos el doble de la señal a muestrear.

La pregunta que surge es ¿qué ocurre si ésta no tiene componente continua? La respuesta es que se obtiene solamente expansión de espectro y la recuperación de la señal original, se debe realizar con la despansión del espectro volviendo a multiplicar de manera temporal la señal con la función de muestreo sin continua, o con una señal cosenoidal pura con frecuencia de la fundamental obteniendo la demodulación correspondiente y posterior filtrado.

DE LA EXPANSIÓN

Tomaremos una señal $f(t)$ cuya transformada de Fourier es $F(\omega)$ limitada en frecuencia a un ancho de banda W (rd/s) y la convolucionaremos en frecuencia con una señal muestreadora $P_{Tr}(t)$, cuya transformada es $P_{Tr}(\omega)$ obteniendo la señal $f_{scm}(t)$, tal como se ve en el diagrama de bloques de la Fig. 1.

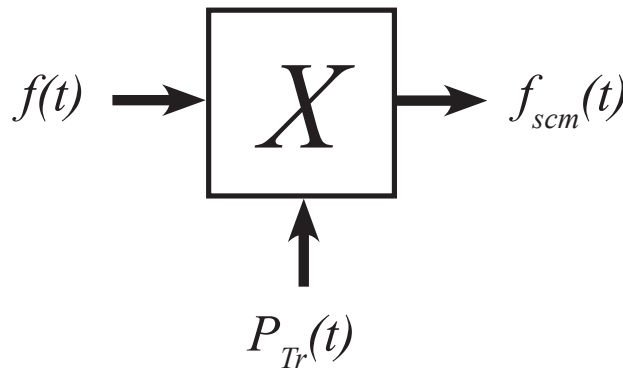


Figura 1 - Diagrama en bloques expansión

Esto se visualiza en la (1).

$$f_{scm}(t) = f(t) \cdot P_{Tr}(t) \tag{1}$$

Aplicando la convolución a la (1) se obtiene:

$$F_{scm}(\omega) = \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * P_{Tr}(\omega)] \tag{2}$$

La expresión de la transformada de Fourier de la señal $P_{Tr}(\omega)$ se muestra en la (3) y responde a una función $Sinc(x) = Sa(x\pi)$, función discreta para n impar y sin componente continua.

$$PT\tau(\omega) = 2\pi A \frac{\tau}{T} \sum_{n(impar)=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(n\omega_s \frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_s \frac{\tau}{2}} \delta(\omega - n\omega_s) = 2\pi A \frac{\tau}{T} \sum_{n(impar)=-\infty}^{\infty} Sa\left(n\omega_s \frac{\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \tag{3}$$

donde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia de muestreo y τ el ancho del pulso que fija los cruces por cero de la señal.

La resolución de la (2) se ve en la (4).

$$F_{scm}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[F(\omega) * 2\pi \frac{A\tau}{T} \sum_{n(\text{impar})=-\infty}^{\infty} S_a\left(n\omega_s \frac{\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \right] = \frac{A\tau}{T} \sum_{n(\text{impar})=-\infty}^{\infty} S_a\left(n\omega_s \frac{\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s) \quad (4)$$

Se ve claramente cómo se repite la función inicial a lo largo de la composición espectral de la muestreadora pero no aparece la función inicial en el espectro de salida.

De tal manera que para recuperar la función inicial no se logra con un filtro pasa bajo, si no que se debe multiplicar nuevamente por $P_{Tr}(t)$ (o demodular con un $\text{Cos}(\omega_s t)$ puro). La Fig. 2 muestra el diagrama de bloques.

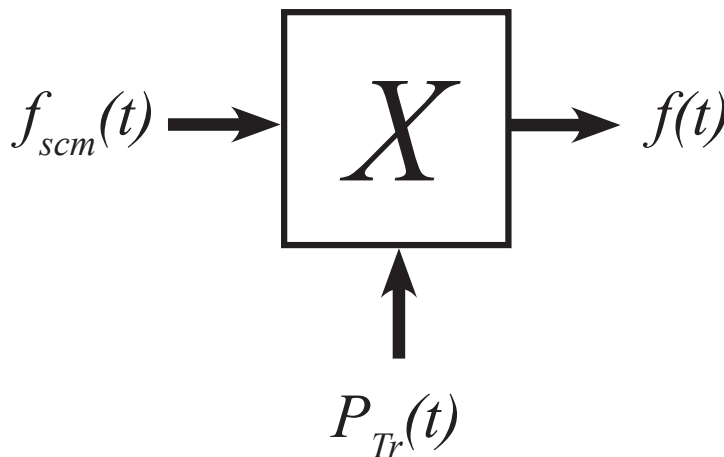


Figura 2 - Diagrama en bloque despansión

La expresión (5) muestra la despansión.

$$f(t) = f_{scm} P_{Tr}(t) \quad (5)$$

Espectralmente la (5) se transforma aplicando convolución y se muestra en la (6).

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[F_{scm}(\omega) * P_{Tr}(\omega) \right] \quad (6)$$

Resolviendo la (6):

$$F(\omega) = \left[\frac{1}{2\pi} \frac{A\tau}{T} \sum_{-n=\text{impar}}^{\infty} S_a\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s) \right] * \left[2\pi \cdot A \frac{\tau}{T} \sum_{-n=\text{impar}}^{\infty} S_a\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \right] \quad (7)$$

DE LA SIMULACIÓN

Lo expresado será visualizado en simulación en un entorno MSv12. La función será una señal de 10 KHz, de forma cosenoidal de amplitud pico de 1 Voltio.

$$e_m(t) = \text{Cos}(2\pi 10^4 t) \tag{8}$$

La Fig. 3 muestra la señal de entrada en tiempo y la 4 en frecuencia.

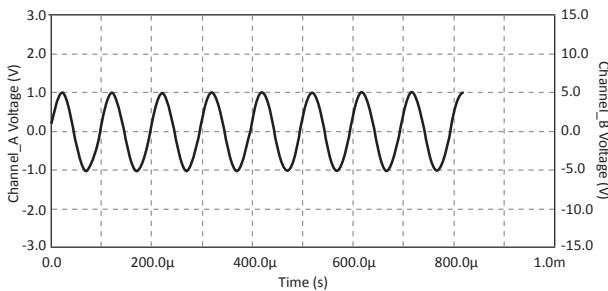


Figura 3 - Señal de entrada temporal

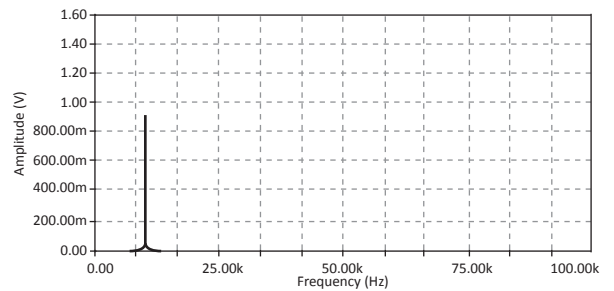


Figura 4 - Señal de entrada en frecuencia

La señal de muestreo $P_{T\tau}(t)$ será una onda cuadrada sin valor medio de velocidad 80 kbits/seg donde la frecuencia fundamental es de 40 kHz, con un dutty cycle del 50 % y amplitud de 1 Voltio.

Existiendo en valores impares de 40 kHz y los valores pares pasa por cero. Reemplazando en la (3) queda la (9):

$$P_{T\tau}(\omega) = \pi \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \text{Sa}\left(n \frac{\pi}{2}\right) \delta(\omega - n.8.\pi.10^4) \tag{9}$$

La Fig. 5 muestra esta señal de manera temporal y la 6 espectralmente.

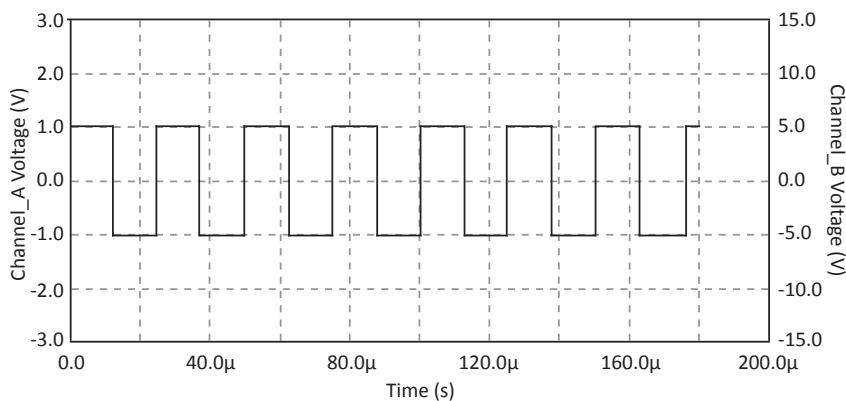


Figura 5 - Señal de muestreo en tiempo

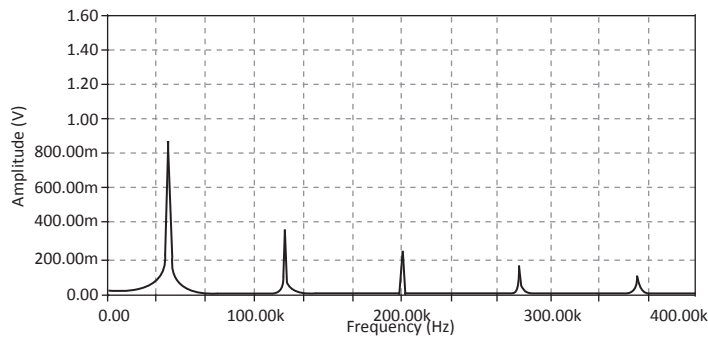


Figura 6 - Composición espectral $P_{T_r}(\omega)$

La señal $f_{scm}(t)$ y su composición espectral $F_{scm}(\omega)$ se ve en la (10).

$$F_{scm}(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=impar}^{\infty} Sa\left(n \frac{\pi}{2}\right) \left[\delta(\omega - n6\pi 10^4) + \delta(\omega - n10\pi 10^4) \right] \quad (10)$$

La señal $f_{scm}(t)$ se ve en la Fig. 7 y en la Fig. 8 se ve la composición espectral $F_{scm}(\omega)$.

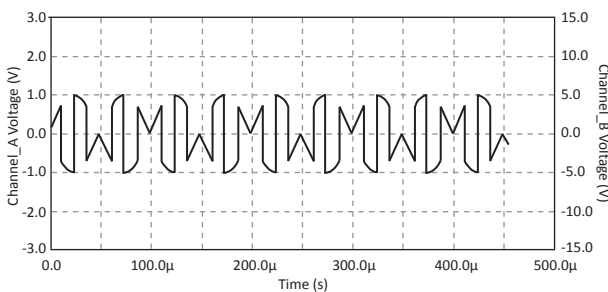


Figura 7 - Señal $f_{scm}(t)$

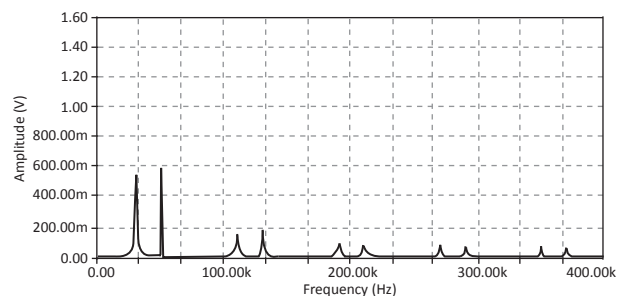


Figura 8 - Señal $F_{scm}(\omega)$

Se ve como $F_{scm}(\omega)$ es una composición espectral donde la información de 10 kHz aparece como bandas laterales en los valores impares de 40 kHz.

Esto significa que el espectro inicial se expande a lo largo de las componentes de la onda cuadrada. De hecho que como la $P_{T_r}(t)$ no tiene continua, no aparece la señal de 10 kHz. Por eso no es esencialmente un muestreo de la señal inicial sino una modulación de expansión espectral donde la recuperación se hace multiplicando de nuevo por la $P_{T_r}(t)$ y no de la manera convencional del muestreo con un filtro pasa bajo. Si a la (10) se la multiplica temporalmente por la $P_{T_r}(t)$ se recupera la señal inicial de 10 kHz, tal como se expresa en la (11).

$$\text{Cos}(2\pi 10^4 t) = f_{scm} \cdot P_{T_r}(t) \quad (11)$$

La Fig. 9 muestra de manera temporal todo el proceso: en la primera ubicación la señal de 10 kHz,

en la segunda la $P_{Tr}(t)$, en la tercera la $f_{scm}(t)$ y en la cuarta ubicación la señal recuperada.

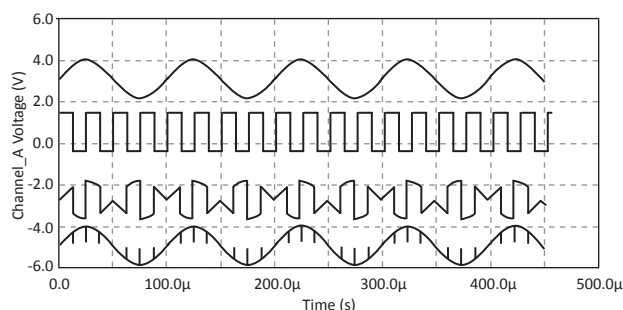


Figura 9 - Proceso temporal completo

CONCLUSIONES

Si se multiplica una señal por una función de muestreo sin componente continua la señal resultante es estructuralmente una modulación en expansión del espectro donde la recuperación de la señal original se logra volviendo a multiplicar dicha señal por la función muestreadora original, funcionando como una despansión del espectro.

Esto es lo que denominamos “*cuasi muestreo*” y es interesante como ampliación del teorema del muestreo que, claro está, siempre parte de una muestreadora con componente continua. Este proceso, que también puede denominarse de modulación por medio de un tren de pulsos rectangulares, permite ser simulado y esclarecido, dando ideas sobre distintas formas de modulación y muestreo.

Una propuesta y conclusión de nuestro interés es el sistema de spread spectrum (espectro ensanchado) donde en trabajos futuros podremos usar las técnicas de cuasi muestreo.

REFERENCIAS

- Strembler*, “Introducción a los Sistemas de Comunicación”. 3° Edición. Addison-Wesley; 126-135 (1997).
- Lathi*, “Introducción a la Teoría y Sistemas de Comunicación”. 1° Edición. Limusa. 94-100, 237-246 (1989).
- Couch II*, “Sistemas de Comunicación Digitales y Analógicos”. 5° Edición. Prentice-Hall. 129-137 (1998).
- Danizio Pedro*, “Teoría de las Comunicaciones”. 4° Edición. Universitas. 159-166 (2009).
- Oppenheim, Willsky, Nawad Hamid*, “Señales y Sistemas”. 2° Edición. Prentice Hall. 67-89 (1998).
- Sauchelli*, “Teoría de Señales y Sistemas Lineales”. 1° Edición. Universitas. 34-45(2004).
- Haifeng Xiao*, “Radio and Wireless Symposium (RWS) 2012”. IEEE, (Jan 2012).
- Warfield*, “Modulation Measurement Theory and Technique”. IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement. Vol. IM 18, (Junio 1969).
- Xiaolong Li*, “Simulink-based Simulation of Quadrature Amplitude”. Paper 205, ENG 105. Modulation (QAM) System. Indiana State University - xli3@isugw.indstate.edu.