

Ejemplos de Prueba para Programas de Elementos Finitos

Resumen: En el presente trabajo se presentan ejemplos seleccionados para la enseñanza del uso de programas de elementos finitos aplicados a la elasticidad en la formación de grado en Ingeniería. Los casos seleccionados, con solución analítica o resultado numérico conocido, constituyen herramientas para alcanzar diferentes objetivos, tales como el aprendizaje en el uso de programas de cálculo mediante elementos finitos y la comprensión de los pasos involucrados al modelar estructuras mediante el método -especialmente en programas enlatados-, la correcta interpretación de los resultados obtenidos, la evaluación del funcionamiento de programas de desarrollo propio, entre otros. La colección de ejemplos será de apoyo en cátedras donde se aplica el método, así como también para el dictado de cursos extracurriculares con el fin de introducir a los estudiantes de Ingeniería al uso de programas por elementos finitos para el análisis estructural.

Palabras Claves: Elementos finitos, elasticidad, enseñanza, ingeniería.

Abstract: In the present work we show selected examples for teaching the use of finite element programs applied to Elasticity in the undergraduate Engineering program. The cases selected, with the analytical solution or known numerical result, constitute tools to achieve different objectives, such as the learning in the use of calculation programs using finite elements and the understanding of the steps involved in modeling structures using the method - especially in canned programs- the correct interpretation of the results obtained, the evaluation of the performance of own development programs, among others. The collection of examples will be of support in courses where the method is applied, as well as for the teaching in extracurricular courses in order to introduce the students of Engineering in to the use of finite element programs for structural analysis.

Keywords: Finite elements, elasticity, teaching, Engineering.

Sofía M. Missan Dalmasso

Grupo de Investigación en Métodos Numéricos en Ingeniería (GIMNI), Facultad Regional Santa Fe, UTN

Lavaisse 610, Santa Fe, TE +54 342 4602390

Mail: sofimissan_88@hotmail.com

INTRODUCCIÓN

El uso de programas de cálculo estructural empleando el Método de los Elementos Finitos (MEF) es hoy cotidiano en el ejercicio profesional de la Ingeniería. Sin embargo, su uso no se encuentra del todo arraigado en las prácticas docentes de las carreras de la Facultad Regional Santa Fe. Para paliar esta deficiencia, hace algunos años que se dictan las cátedras “Métodos de los Elementos Finitos para el Análisis Estructural” de la carrera de Ingeniería Civil, y de “Teoría y Aplicaciones del MEF” en Ingeniería Mecánica, ambas en el 5º Nivel, al tiempo que se están proponiendo cursos extracurriculares para el uso de programas de análisis estructural mediante el MEF.

Por ello, se está trabajando en la generación de una colección de ejemplos con solución de referencia para el apoyo en el dictado de estas cátedras y cursos, abarcando situaciones que se dan en la faz académica, de investigación y de ejercicio profesional.

En la parte académica, para aprender a utilizar programas de elementos finitos es importante poder contar ejemplos sencillos, de los cuales se conozcan los resultados que el programa debe entregar. En las actividades de investigación, donde se desarrollan o modifican programas de análisis estructural, es necesario poder validar el funcionamiento de los mismos. Finalmente, en el aspecto práctico profesional, es de interés poder contar con ejemplos que permitan verificar el desempeño de diferentes programas de elementos finitos o que permitan corroborar que el usuario lo está empleando adecuadamente.

Para todos los casos indicados, resulta de importancia poder tener una biblioteca de casos de prueba que cubran distintas situaciones. Por este motivo, se reedita parcialmente la biblioteca publicada en Sonzogni et al. (1998) y se incorporan nuevos ejemplos, de los cuales algunos se presentan en este trabajo.

La actividad consiste concretamente en seleccionar una serie de ejemplos, con solución analítica o resultado numérico conocido, que permiten poner a prueba determinadas capacidades de un programa de elementos finitos para ingeniería civil.

La elección de la biblioteca de ejemplos y RFEM (2016) como programa de elementos finitos a utilizar, fue realizada en conjunto con los docentes de las materias “Métodos de los Elementos Finitos para el Análisis Estructural”, y de “Teoría y Aplicaciones del MEF”.

En los distintos casos, se describen las hipótesis utilizadas, por ejemplo, el tipo de análisis, condiciones de borde, estados de sollicitación, propiedades del material, tipos de elementos, y los resultados analíticos que brinda la bibliografía. Luego, se detallan los resultados obtenidos y la metodología utilizada en el programa, para finalmente comparar las magnitudes obtenidas.

METODOLOGÍA

En función del listado del trabajo de Sonzogni et al. (1998) y otros ejemplos propuestos, se hace un nuevo listado con los ejemplos a presentar, teniendo en cuenta los siguientes criterios de selección: ser un caso de resolución simple y de aplicación en Ingeniería Civil o Mecánica, tener una solución analítica o resultado numérico conocido y poner de manifiesto algún tipo estructural, forma de aplicación de cargas, comportamiento del material, etc.

A continuación, se explica el paso a paso de la metodología empleada.

Primero: Se selecciona el problema a reproducir, teniendo en cuenta los criterios anteriormente mencionados.

Segundo: Se determinan las hipótesis a utilizar en los ejemplos seleccionados, es decir, primero se plantea el tipo de análisis, en todos los casos elástico-lineal.

Luego, se establece el tipo de elemento a analizar, las dimensiones geométricas que intervienen, condiciones de borde, estados de sollicitación y propiedades del material, en todos los casos materiales elásticos, lineales e isótropos, brindando como dato el módulo de Young, o módulo de elasticidad longitudinal, y el coeficiente de Poisson.

Tercero: Se halla la solución analítica o numérica de referencia a contrastar con el programa.

Cuarto: Se reproduce el ejemplo mediante un programa de elementos finitos. En el presente trabajo, se utiliza el programa RFEM. Al ingresar al programa primero se determina el tipo de modelo a utilizar que fuera necesario, es decir, se adopta un modelo 2D o 3D. Luego se realiza el trazado de la geometría, creando secciones y materiales. Se establecen las condiciones de borde, el estado de cargas, aplicando un tipo de análisis lineal, y, de acuerdo al grado de precisión que se quiere obtener en los resultados, se adopta un refinamiento apropiado. Finalmente se procede al cálculo, y al procesamiento y evaluación de resultados.

Quinto: Se compararán los resultados obtenidos en los puntos 3 y 4; y se realizan apreciaciones sobre el refinamiento de malla.

RESULTADOS

Para cada uno de los ejemplos desarrollados a continuación se siguieron los pasos mencionados en Metodología y se exponen un resumen y comentarios de los resultados obtenidos. En cada caso, se detallan las hipótesis adoptadas para la correcta resolución de los problemas y todos los datos necesarios para reproducirlo, esto es, las dimensiones, materiales, tipos de elementos, malla, condiciones de borde, etc.

Barra prismática biempotrada sometida a sollicitación axial

En la Tabla 1 se detallan los resultados e hipótesis utilizadas. El problema en sí mismo es un caso de elasticidad en una dimensión; sin embargo, en los programas de cálculo, es habitual resolverlo directamente con una hipótesis 2D. En el programa se plantea un modelo con un elemento de barra tipo cercha. Debieron proponerse dimensiones para la sección, para la cual se adoptó una sección cuadrada de 0.1m de lado. La solución analítica puede hallarse aplicando directamente la Resistencia de Materiales. En este caso no se encontraron diferencias entre los resultados analíticos y del programa.

Barra sometida a carga distribuida en la dirección de su eje

En la Tabla 2 se detallan los resultados e hipótesis utilizadas. Se presenta, como en el caso anterior, un caso de elasticidad en una dimensión que se resuelve directamente con una hipótesis 2D.

La solución analítica está en función de la ecuación (1), cuyos parámetros se encuentran también detallados en la Tabla II.

$$u_x = \frac{c}{2 \times E \times A} \times \left(-\frac{x^3}{3} + L^2 \times x \right) \quad (1)$$

Para este ejemplo, se determinan los valores de desplazamientos analíticos para distintas posiciones sobre la barra y con distintos grados de refinamiento. Por lo tanto, se plantea cuatro modelos 2D de uno, dos, cuatro y diez elementos de barra continuos tipo cercha para poder obtener los valores de desplazamientos en los distintos puntos. Se propone las dimensiones de la sección, adoptándose una sección rectangular de 4 cm por 5 cm de lado.

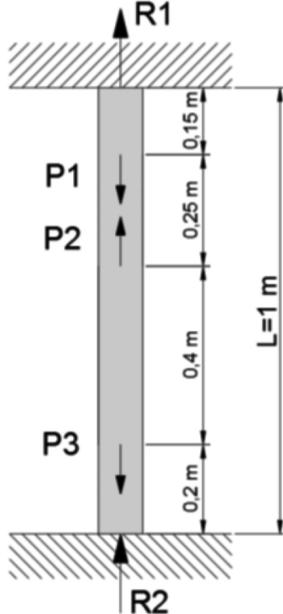
| | |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tipo de análisis | Estático lineal. |
| Geometría y datos |  <p>Sección: Área=1,0 m²</p> |
| Condiciones de borde | Empotramiento en ambos extremos. |
| Estados de sollicitación | Fuerzas concentradas: P1= 0,2 KN P2= -0,1 KN P3= 0,04 KN |
| Propiedades del material | Elástico lineal isótropo E=20000 KN/cm ² v=0,3 |
| Tipos de elemento | Barra bidimensional. |
| Resultados analíticos de referencia | Reacción empotramiento superior: R1=0,118 KN Reacción empotramiento inferior: R2=0,022 KN |
| Resultados de programa de elementos finitos RFEM | Reacción empotramiento superior: R1=0,118 KN Reacción empotramiento inferior: R2=0,022 KN |

Tabla 1: Resultados de Barra prismática biempotrada.

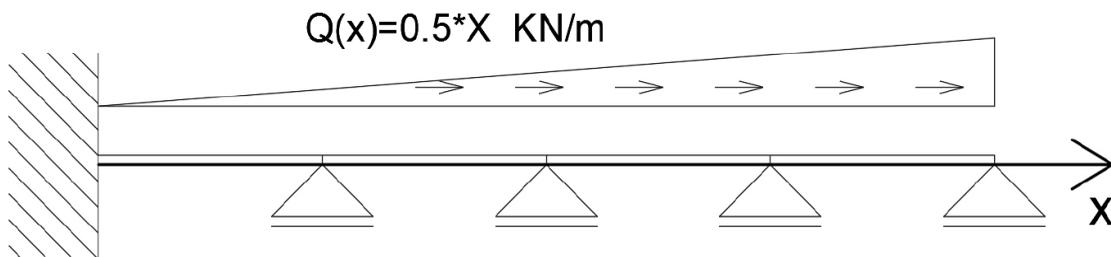


Fig. 1: Condiciones de borde para cuatro elementos en el caso de la barra sometida a carga distribuida en dirección de su eje.

Debido a las condiciones adoptadas, es decir, un modelo en dos dimensiones y de varios elementos tipo cercha continuos, se tuvieron que modificar las condiciones de borde en los nudos intermedios de las barras,

elementos coincide prácticamente.

En la tabla II se exponen los resultados para una longitud L igual a 2 m, tanto para la solución analítica como para la numérica.

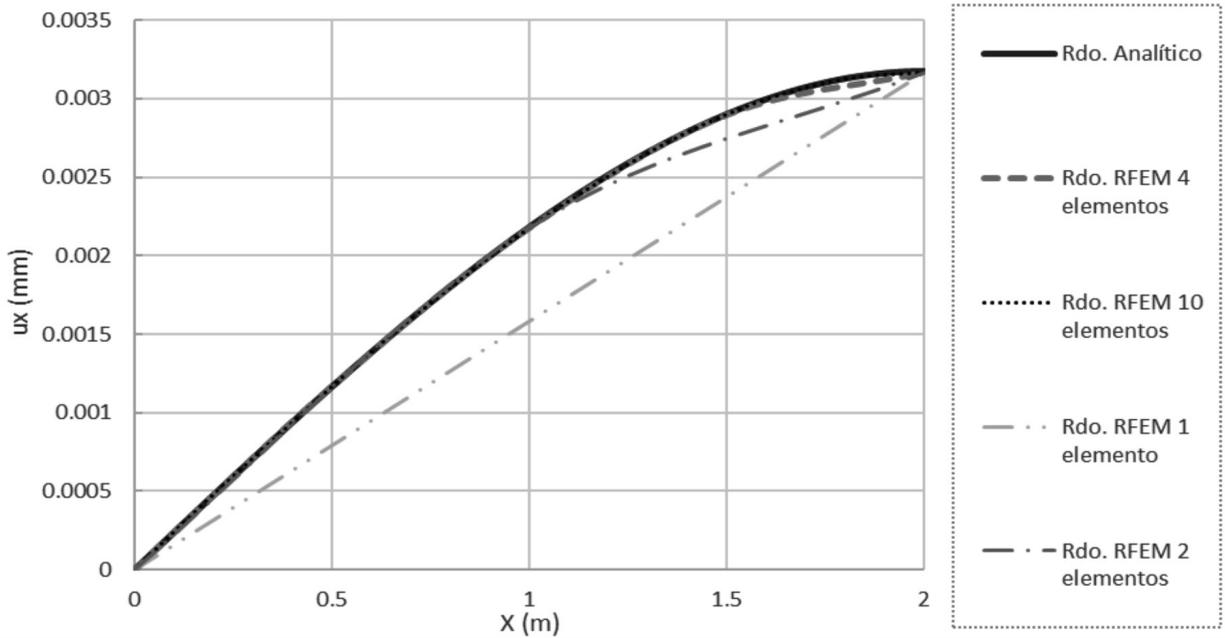


Fig. 2: Gráfica de comparación de resultados.

restringiendo el desplazamiento en sentido vertical, para obtener de esta manera un problema isostático en 2D. En la siguiente figura 1 se observan las condiciones de borde aplicadas a los elementos.

En los diferentes diagramas de desplazamientos en dirección x , se destaca que al refinar la malla de elementos finitos, el diagrama se vuelve más curvo y preciso; esto se debe a que la solución analítica es cúbica y se resuelve con elementos lineales.

También se realizó una gráfica con los valores extraídos del programa, figura 2, en la que se compara los resultados obtenidos analíticamente, con el programa para uno, dos, cuatro y diez elementos, observándose que para cuatro elementos ya se aproxima bastante a la solución analítica y con diez

Viga en voladizo sometida a corte

Se presentan dimensiones y cargas de la viga que corresponden a un estado plano de tensiones que puede describirse analíticamente con las Funciones de Airy (Ortiz Berrocal, 1998). En la siguiente Tabla III se detallan los resultados e hipótesis utilizadas. El objetivo en este ejemplo es evaluar los elementos de estado plano de tensiones.

Se realizaron tres mallados, de dieciséis, cien y diez mil elementos cuadrangulares en forma estructurada. En este caso se observó que al refinar la malla los resultados del programa se aproximan a los analíticos. En las figuras 3 y 4, extraídas del programa, se pueden visualizar los resultados para una malla de

4x4 elementos obtenidos mediante el programa de elementos finitos.

Placa circular empotrada con carga distribuida

Se analiza una placa plana circular con carga uniforme sobre la superficie y contornos empotrados. En la Tabla IV se detallan los resultados e hipótesis utilizadas. La solución analítica según

Timoshenko y Woionowsky-Krieger (1987) está dada por la ecuación (2):

$$u_z = \frac{Qz \times R^4}{64 \times \frac{E \times t^3}{12 \times (1 - \nu^2)}} \tag{2}$$

Reemplazando con los valores dados en la Tabla IV, el resultado analítico es un descenso en el centro de la placa de $u_z = -0.5408$ cm.

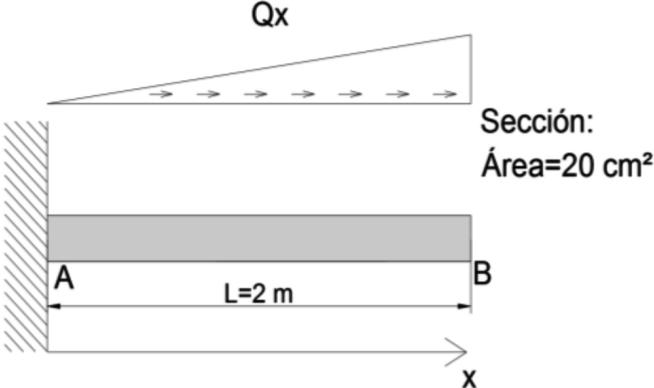
| Tipo de análisis | Estático lineal. |
|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Geometría y datos</p> |  |
| <p>Condiciones de borde</p> | <p>Empotrada en A.</p> |
| <p>Estados de sollicitación</p> | <p>Carga distribuida: $Q_x = c \times X$; $c = 0,5$</p> |
| <p>Propiedades del material</p> | <p>Elástico lineal isótropo $E=21000 \text{ KN/cm}^2$ $\nu=0,3$</p> |
| <p>Tipos de elemento</p> | <p>Barra bidimensional</p> |
| <p>Resultados analíticos de referencia</p> | <p>Desplazamiento horizontal: Para $x=2$ m; $u_x=0,00317$ mm</p> |
| <p>Resultados de programa de elementos finitos RFEM</p> | <p>Desplazamiento horizontal: Para $x=2$ m; $u_x=0,00317$ mm</p> |

Tabla 2: Resultados del problema de la barra sometida a carga distribuida.

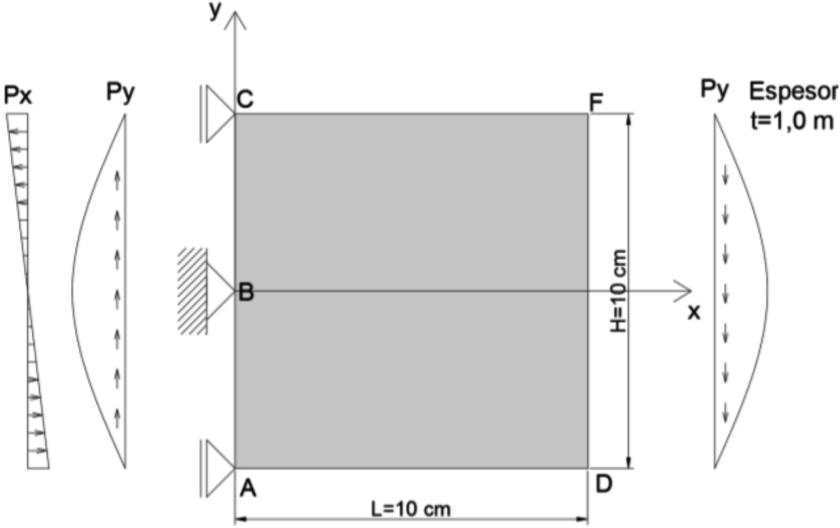
| | |
|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Tipo de análisis</p> | <p>Estático lineal.</p> |
| <p>Geometría y datos</p> |  <p style="text-align: center;">$I = (t \times H^3)/12 = 8,33 \times 10^{-7} m^4$</p> |
| <p>Condiciones de borde</p> | <p>En punto A y C desplazamiento según x impedido. En punto B desplazamientos según x e y impedidos.</p> |
| <p>Estados de sollicitación</p> | <p>Cargas distribuidas: $P = 10 [kN]$ En lado DF: $p_x = 0; p_y = -\frac{P \times t}{2 \times I} \times (\frac{H^2}{4} - y^2)$ En lado AC: $p_x = -\frac{P \times t \times L \times y}{I}; p_y = \frac{P \times t}{2 \times I} \times (\frac{H^2}{4} - y^2)$</p> |
| <p>Propiedades del material</p> | <p>Elástico lineal isótropo $E=21000 \text{ KN/cm}^2$ $\nu=0,3$</p> |
| <p>Tipos de elemento</p> | <p>Membrana estado plano de tensiones.</p> |
| <p>Resultados analíticos de referencia</p> | <p>Desplazamiento vertical del punto D: -0,00321428 cm Desplazamiento horizontal del punto D: -0,00142857 cm</p> |
| <p>Resultados de programa de elementos finitos RFEM</p> | <p>Desplazamiento vertical del punto D: Malla 4x4 : -0,003155 cm Malla 10x10: -0,003202 cm Malla 100x100: -0,003214cm Desplazamiento horizontal del punto D: Malla 4x4 : -0,001410 cm Malla 10x10: -0,001425 cm Malla 100x100: -0,001429 cm</p> |

Tabla 3: Resultados de Viga en voladizo.

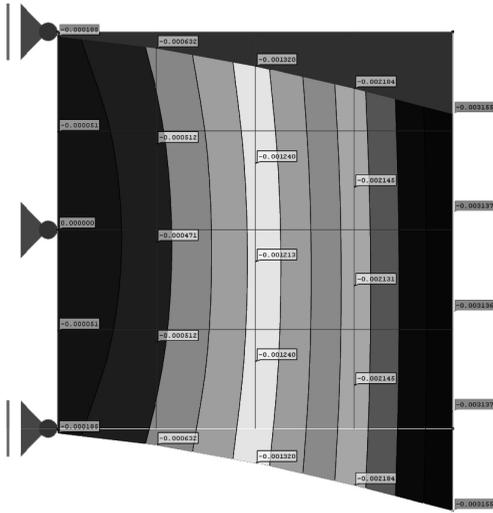


Fig. 3: Desplazamientos globales uy con mallado de 4x4 elementos.

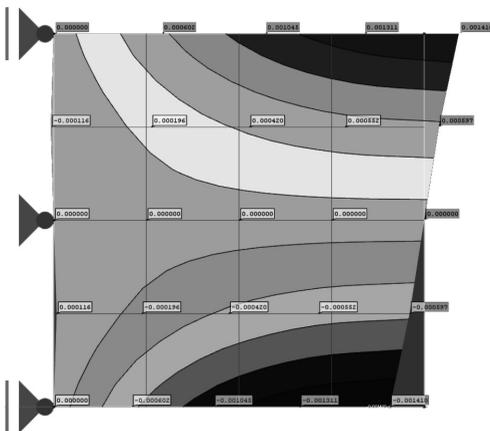


Fig. 4: Desplazamientos globales ux con mallado de 4x4 elementos.

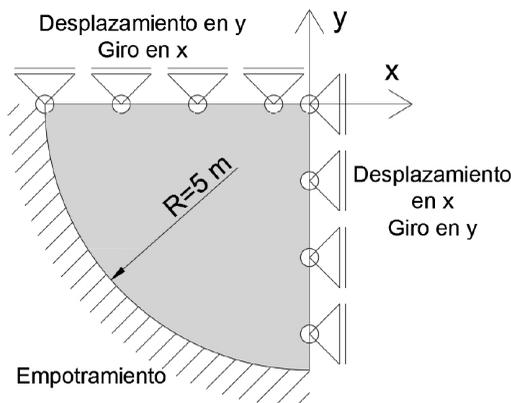


Fig. 5: Condiciones de borde para la placa circular representada en un cuarto de círculo.

Este ejemplo se plantea en 3D, utilizando un elemento de superficie con rigidez estándar. Se discretiza un cuarto de la placa colocando condiciones de borde de simetría, detalladas en la figura 5. Una de las dificultades del ejemplo es la de la aplicación correcta de las condiciones de borde en el caso de simular un sector de la placa en lugar del círculo; como alternativa, se puede modelar la placa circular entera, sin tener que aplicar condiciones de borde de simetría. Se realizan tres mallados con diferente refinamiento, empleando elementos cuadrangulares y triangulares. Al ingresar los datos al programa se utilizaron dos teorías de flexión de placas, al emplear la teoría de Kirchhoff se convergió al resultado analítico, en cambio al utilizar Mindlin se dispersaron los resultados del objetivo. Destacándose de esta manera, la importancia de aplicar de forma correcta en el programa la misma teoría que en la solución analítica. En la figura 6 se visualizan las cargas, las condiciones de borde, los resultados y la deformada para una malla de 400 elementos.

DISCUSIÓN

Se obtuvieron resultados satisfactorios al resolver los ejemplos mediante el programa, y no se encontraron grandes diferencias entre los resultados del MEF y los analíticos. También se puede destacar que al desarrollar los ejemplos se encontraron dificultades diversas, como por ejemplo en las condiciones de borde, debiendo analizarse cuidadosamente los grados de libertad a restringir. En los casos de elasticidad en una dimensión fue necesario proponer las dimensiones de las secciones para ingresar los datos, dado que los programas que aplican el MEF requieren indefectiblemente los datos de sección y material para calcular las matrices elementales.

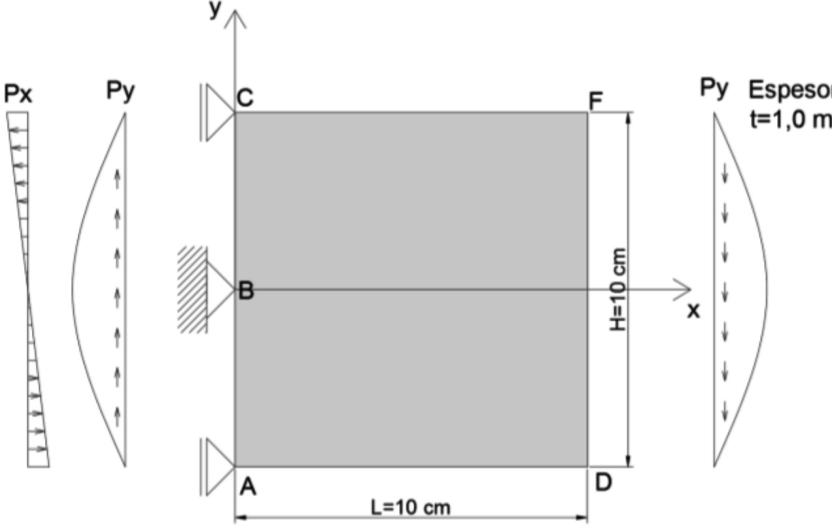
| | |
|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Tipo de análisis</p> | <p>Estático lineal.</p> |
| <p>Geometría y datos</p> |  <p style="text-align: center;">$I = (t \times H^3)/12 = 8,33 \times 10^{-7} m^4$</p> |
| <p>Condiciones de borde</p> | <p>En punto A y C desplazamiento según x impedido. En punto B desplazamientos según x e y impedidos.</p> |
| <p>Estados de sollicitación</p> | <p>Cargas distribuidas: $P = 10 [kN]$ En lado DF: $p_x = 0; p_y = -\frac{P \times t}{2 \times I} \times (\frac{H^2}{4} - y^2)$ En lado AC: $p_x = -\frac{P \times t \times L \times y}{I}; p_y = \frac{P \times t}{2 \times I} \times (\frac{H^2}{4} - y^2)$</p> |
| <p>Propiedades del material</p> | <p>Elástico lineal isótropo $E=21000 \text{ KN/cm}^2$ $\nu=0,3$</p> |
| <p>Tipos de elemento</p> | <p>Membrana estado plano de tensiones.</p> |
| <p>Resultados analíticos de referencia</p> | <p>Desplazamiento vertical del punto D: -0,00321428 cm Desplazamiento horizontal del punto D: -0,00142857 cm</p> |
| <p>Resultados de programa de elementos finitos RFEM</p> | <p>Desplazamiento vertical del punto D: Malla 4x4 : -0,003155 cm Malla 10x10: -0,003202 cm Malla 100x100: -0,003214 cm Desplazamiento horizontal del punto D: Malla 4x4 : -0,001410 cm Malla 10x10: -0,001425 cm Malla 100x100: -0,001429 cm</p> |

Tabla 4: Resultados de Placa circular empotrada.

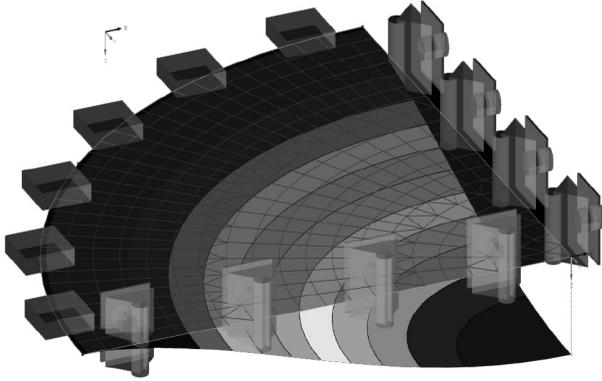


Fig. 6: Deformada para mallado de 400 elementos.

Se alcanzó en gran parte a cumplir los objetivos planteados, logrando establecer varios ejemplos con solución analítica para tener como sustento de la correcta utilización de programas de elementos finitos, y estableciendo algunas consideraciones necesarias para la correcta simulación. Además de los presentados, quedaron varios ejemplos por incluir, es decir nuevos casos con otras tipologías estructurales, condiciones de vínculo y formas de sollicitación, que pueden ser

de interés para estudiantes o profesionales de la ingeniería, que serán documentados debidamente para su empleo en el dictado de los cursos antes mencionados.

CONCLUSIONES

Se seleccionaron ejemplos de solución conocida para indagar en el análisis por elementos finitos mediante un programa comercial. Para cada uno, se destacaron las cuestiones de interés al momento de emplearlos como ejemplos en la enseñanza del método de los elementos finitos, así como también se evalúa la sensibilidad de cada ejemplo a los cambios en el modelo numérico. Si bien se usó un único programa para contrastar resultados, la metodología es válida para evaluar el funcionamiento de programas de elementos finitos de propósito general, ya que brinda al usuario herramientas para comprender los mecanismos de inclusión de datos e hipótesis, así como también la interpretación de los resultados obtenidos.

REFERENCIAS

Ortiz Berrocal, L. (1998). Elasticidad. Madrid: Mc. Graw-Hill España.

Timoshenko, S. y Woionowsky-Krieger, S. (1987). Theory of Plates and Shells. New York, Mc. Graw-Hill.

RFEM (2016) El programa de análisis estructural para profesionales. [https://www.dlubal.com/es/](https://www.dlubal.com/es/productos/rfem-software-del-mef/que-es-rfem)

productos/rfem-software-del-mef/que-es-rfem.

Sonzogni, V., Heinz de Ferrando, M., Zanetta, A. (1998). Una biblioteca de casos de prueba para programas de elementos finitos. XVI Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural. Buenos Aires: Centro Argentino de Ingenieros.