



# Flujos de Plasma Hidrodinámicos y Magnetohidrodinámicos. Parte I

## Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Plasma Flows. Part I

Presentación: 08/02/2021

Aprobación: 31/03/2021

### Néstor Rotstein

Estudio de energías por fusión de plasmas magnetizados, Facultad Regional Buenos Aires, Medrano 951 (CP1179), Universidad Tecnológica Nacional – Argentina  
nrotstein@frba.utn.edu.ar

### Resumen

En este artículo desarrollamos un modelo hidrodinámico de un flujo de plasma no magnetizado, acelerado bajo la acción de sólo dos fuerzas, una debida al gradiente de presión y la otra la gravitatoria. Fijamos fenomenológicamente la topología del flujo a partir de un criterio de plausibilidad con base observacional. La discusión de la termodinámica asociada al flujo muestra que en el caso de estrellas cuyo viento no es generado por la presión de radiación y carecen de una corona, los valores que se obtienen de temperatura son mayores a los medidos, y que sólo bajo condiciones extremadamente particulares podría desarrollarse un viento compatible con las observaciones.

**Palabras clave:** plasmas, hidrodinámico, rotación, curvatura

### Abstract

In this paper we develop an hydrodynamic model of a non-magnetized plasma flow, accelerated under the action of only two forces, one due to the pressure gradient and the other the gravitational one. Phenomenologically we fix the topology of the flow from an observationally based plausibility criterion. The discussion of the thermodynamics associated with the flow shows that in the case of stars whose wind is not generated by radiation pressure, or that do not have a corona, the values obtained for temperature are higher than those measured, and that only under extremely particular conditions could a wind compatible with the observations develop.

**Key words:** plasmas, hydrodynamic, rotation, curvature

## 1. Introducción

Los vientos estelares constituyen uno de los mecanismos de eyección de masa más importantes a través de los cuales una estrella pierde persistentemente parte de su masa y mantiene el equilibrio con el medio interestelar que la rodea. Las características prominentes de un viento estelar, la tasa de pérdida de masa, su velocidad, la cantidad de movimiento que intercambia y la energía que transporta, se hallan íntimamente relacionadas con su dinámica rotacional y su evolución, y dependen básicamente de la ubicación de la estrella en el diagrama evolutivo (véanse, por ejemplo, las revisiones de Owocki (2013) o Lamers y Levesque (2017)).

El mecanismo dominante de los vientos de las estrellas de mayor luminosidad es la presión de radiación, que es absorbida y dispersada en las líneas espectrales, de manera tal que la metalicidad desempeña un papel determinante en la morfología del viento (Kudritzki, 2002).

Algunas estrellas de este grupo, a su vez, muestran ciertas características diferenciadas que se traducen en dinámicas atmosféricas estructuralmente diferentes. Un subgrupo muestra sobreabundancia de algunos metales, rotación lenta y fuertes campos magnéticos. En el otro subgrupo, las estrellas son rotadores rápidos que forman un disco kepleriano ecuatorial, cuya dinámica estaría gobernada en parte por la viscosidad dinámica, y normalmente son clasificados como estrellas no magnéticas (Rivinius et al, 2013).

Pero la viscosidad molecular por sí sola es insuficiente para explicar las características observadas en estos discos de acreción, por lo que deben tenerse en cuenta otros mecanismos. Diversos autores (véase por ejemplo Cassinelli et al 2002, Townsend y Owocki 2005, ud-Doula et al, 2008, Clark y Oishi, 2017) sostienen que a partir de un campo magnético, incluso de intensidad relativamente baja, es posible la formación de estos discos a partir de inestabilidades magneto-rotacionales.

Los vientos de estrellas de luminosidad intermedia no pueden ser acelerados por la presión de la radiación (al menos como mecanismo primario) porque el campo radiativo no es lo suficientemente intenso. Su bajo grado de metalicidad tampoco explica las altas tasas de pérdida de masa observadas y la velocidad terminal del viento, porque ambas cantidades disminuyen con la disminución de la metalicidad. ¿Podemos invocar la presencia de campos magnéticos? A pesar de los progresos realizados en los últimos años en el área de la espectropolarimetría, en este tipo de objetos sólo se han encontrado campos magnéticos entre una pequeña fracción de las de mayor masa (Donati y Landstreet, 2009).

Pero que no se detecten no significa que no existan. El análisis de Schöller y colaboradores (2011) de una amplia muestra de estrellas de alta luminosidad reveló que no habría propiedades físicas que impidan ser magnética a una clase particular de estrellas, y que a lo sumo la intensidad del campo magnético en estas podría ser inferior al límite de detección.

Pero si consideramos la presencia de un campo magnético posiblemente deberíamos considerar un plasma no idealmente conductor, porque la resistividad del plasma no sólo se asocia a procesos de calentamiento y transporte sino que además los efectos disipativos (viscosos o resistivos) introducen escalas de disipación muy pequeñas en comparación con la escala estelar.

Luego, surgen varias preguntas que constituyen la clave de este trabajo:

- 1 ¿Cómo afecta un campo magnético la dinámica de una envoltura estelar?
- 2 ¿Existe un valor crítico de campo magnético sólo por encima del cual le es posible

gobernar la dinámica del viento?

- 3 ¿La resistividad del plasma juega un papel importante en la dinámica del viento o en vista de los elevadísimos valores del número de Reynolds magnético debería ser descartada?

La topología del campo magnético es una de las claves de este problema. En muchos estudios de estrellas de tipo temprano se asume la geometría más simple de todas, un campo dipolar en la superficie, cuyo eje eventualmente puede estar inclinado con respecto al eje de rotación (Braithwaite y Spruit (2017)). En otras estrellas, esto produce pobres resultados y las mediciones sólo pueden ser ajustadas asumiendo una geometría más complicada (véase por ejemplo Donati y Landstreet, 2009, ud-Doula et al , 2013). Sin embargo, debemos destacar una de las propiedades más notables de estos campos magnéticos: a diferencia de los de las estrellas de baja masa, son significativamente estables, no se ha visto que cambien a lo largo de décadas de observaciones (Cantiello y Braithwaite, 2019).

Para dar respuesta a las preguntas que hemos planteado y analizar la influencia que tienen sobre el flujo los campos magnéticos, las fuerzas disipativas y la resistividad del plasma, dividiremos el trabajo en tres partes. En esta primera parte analizaremos la dinámica de un flujo de plasma con simetría de rotación sin campo magnético e impulsado sólo por el gradiente de presiones en contra de la fuerza gravitatoria. Para ello, en el capítulo 2 presentaremos la formulación del problema completo, adoptando una configuración novedosa en la que las líneas de flujo no son totalmente abiertas sino que se cierran muy lejos de la superficie estelar. En el apartado 3 habremos de exponer la teoría de vientos no magnetizados, y mostraremos que en tales condiciones existen soluciones físicamente aceptables. El análisis de las diferentes variables dinámicas y termodinámicas mostrará que en estas condiciones la temperatura en la base del viento es mayor que la esperable para el tipo de objetos que analizamos. Finalmente, en el apartado 4, discutiremos los resultados obtenidos.

En la parte II del trabajo regresaremos sobre la misma geometría pero asociada ahora al campo magnético, que de alguna manera completa los trabajos clásicos en este área (Low y Tsinganos 1987; Rotstein y Ferro Fontán, 1995) y estudiaremos las escalas de disipación de fuerzas de tipo viscoso. En la parte III introduciremos la hipótesis de resistividad nula para analizar la tercera de las preguntas que formulamos líneas arriba.

## 2. Tratamiento general

Las ecuaciones magnetohidrodinámicas que gobiernan la evolución estacionaria de fluidos compresibles, magnetizados, en presencia de un campo gravitatorio, independientemente de la geometría propia del fenómeno se escriben como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j}) = 0 \tag{3}$$

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \rho g \mathbf{e}_r + \mathcal{F} \tag{4}$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \left( \frac{\mathcal{P}}{(\gamma - 1)\rho} \right) + \mathcal{P}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \left( \frac{1}{\rho} \right) = \mathcal{Q}(r, \theta) \quad (5)$$

donde, como es habitual,  $\rho$  representa la densidad volumétrica de masa,  $\mathbf{v}$  el campo de velocidades,  $\mathbf{B}$  el campo de inducción magnética,  $g$  la aceleración gravitatoria,  $\mathcal{P} = k_B \rho T / \mu m$  (donde  $\mu$  es el peso molecular medio,  $k_B$  la constante de Boltzmann) la presión del fluido y  $\eta = 1/\mu_0 \sigma$  la difusividad magnética. Hemos cerrado las ecuaciones (1)-(4) con la ecuación (5) de balance termodinámico, que representa la distribución de fuentes de calor que de manera consistente completa el sistema de ecuaciones MHD, en la que  $Q$  representa la tasa de intercambio de potencia por unidad de masa. Hemos incluido además una fuerza  $\mathcal{F}$ , de carácter disipativo, para dar cuenta de eventuales intercambios de cantidad de movimiento y/o de energía a lo largo del viento.

En coordenadas esféricas, con simetría axial, el flujo magnético y el flujo másico, representados por las expresiones (1) y (2), pueden escribirse en las formas

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \nabla A(r, \theta) \times \hat{e}_\theta + B_\theta \hat{e}_\theta \quad (6)$$

$$\rho \mathbf{v} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \nabla \psi(r, \theta) \times \hat{e}_\theta + \rho v_\theta \hat{e}_\theta \quad (7)$$

donde hemos introducido la función de flujo magnético  $A(r, \theta)$  que gobierna la existencia de superficies de flujo magnético, y la función de flujo másico  $\psi(r, \theta)$  con un significado funcional similar para el flujo de masa. Obsérvese que la simetría de rotación hace que las funciones de flujo no dependan de la coordenada azimutal,  $\phi$ ; por otro lado, las funciones de flujo son constantes sobre cada superficie de flujo y describen el flujo poloidal entre las diferentes isosuperficies.

A partir de un criterio de plausibilidad coherente con las observaciones, es siempre posible preestablecer indistintamente las líneas de campo o las líneas de flujo. Para cualquier campo escalar  $\mathcal{E}(r, \theta)$  que cumpla con (7) (o con la ecuación (8)) siempre es posible escribir sus componentes poloidales adoptando

$$\mathcal{E}(r, \theta) = e(r) \operatorname{sen}^2 \theta \quad (8)$$

que, además de su sencillez y capacidad para reproducir los campos observados, posee la enorme virtud de separar variables. A partir de la ecuación (8) resultan

$$Z_r = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \partial_\theta \mathcal{E} = \frac{2e}{r^2} \cos \theta \quad (9)$$

$$Z_\theta = -\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \partial_r \mathcal{E} = -\frac{\partial_r e}{r} \operatorname{sen} \theta \quad (10)$$

donde  $Z_r$  y  $Z_\theta$  representan las componentes poloidales del campo resultante.

La topología del viento (la del flujo de masa si consideramos campo magnético nulo,

o las del campo magnético en caso de ser no nulo) con líneas parcialmente abiertas en las regiones polares y cerradas en la zona ecuatorial puede simularse a través de una función general de la forma

$$\mathcal{E}(r, \theta) = k r^q \text{sen}^2 \theta \tag{11}$$

donde  $q$  es el coeficiente que define la curvatura del campo y su región cerrada. Obsérvese que para evitar que el campo diverja, debe ser  $q < 2$ . En la figura 1 mostramos las líneas de flujo (que son los lugares del plano poloidal en los que  $e(x) \text{sen}^2 \theta = m = \text{constante}$ ) para  $q = -0.2$  y  $q = -1$ .

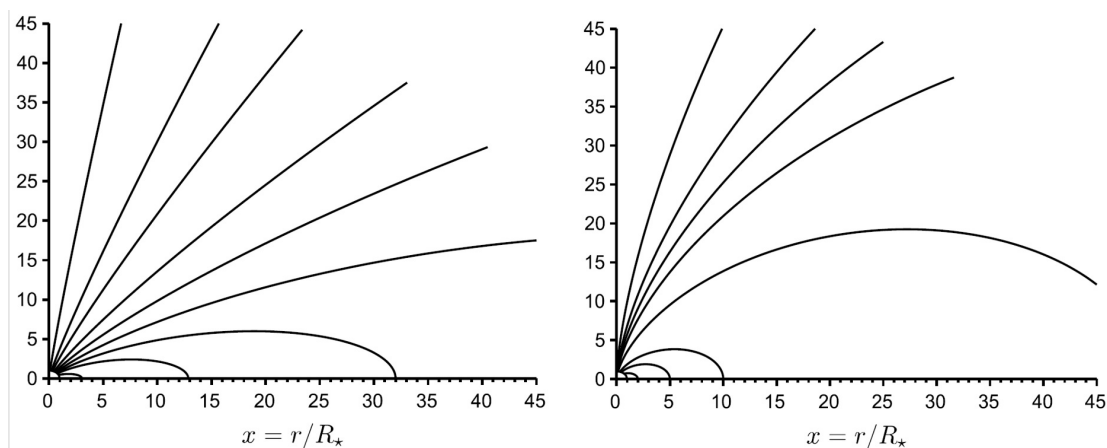


Figura 1: líneas de flujo para  $q = -0,2$  (panel izquierdo) y  $q = -1$  (panel derecho). Todas las líneas son cerradas, pero cuanto mayor es el valor absoluto del parámetro  $q$  más cerca del objeto central se cierran. Para  $q = -0,2$  la curvatura de las líneas polares comienza a evidenciarse a alrededor de  $200 R_*$ , una región en la que el flujo másico se ha disipado.

### 3. Flujos con $B=0$

Escribamos las componentes de la ecuación (4) tomando  $B = \mathcal{F} = 0$ . Para ello, y por razones de sencillez, introduzcamos la distancia adimensional  $x$ , que definiremos en términos del radio estelar como

$$x = \frac{r}{R_*} \tag{12}$$

de manera tal que, teniendo en cuenta que  $\partial_r = \partial_x / R_*$ , podamos redefinir las componentes poloidales del flujo como

$$\rho v_r = 2 \frac{k}{R_*^{2-q}} \frac{1}{x^{2-q}} \cos \theta \equiv \frac{2\kappa}{x^{2-q}} \cos \theta \tag{13}$$

$$\rho v_\theta = -q \frac{k}{R_*^{2-q}} x^{q-2} \text{sen} \theta \equiv -q \frac{\kappa}{x^{2-q}} \text{sen} \theta \tag{14}$$

Para mantener el problema en variables separables y dentro de un nivel matemáticamente tratable, consideraremos la presión en la forma

$$\mathcal{P}(r, \theta) = P_1(r) + P_2(r) \operatorname{sen}^2 \theta \quad (15)$$

Definamos ahora la función  $H(x)$  de la forma

$$H = \frac{\kappa}{\rho x^{2-q}} \quad (16)$$

y su forma adimensional  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}(x) = \frac{H}{v_o} \quad (17)$$

donde  $v_o$  es una velocidad particular en la región del viento. El conjunto de ecuaciones será de variables separables si adoptamos para la velocidad azimutal la forma (absolutamente general y plausible)  $V_\phi = v_\phi(x) \operatorname{sen} \theta$ . Obsérvese que en tal caso la componente azimutal de la ecuación de balance de momentos (4) resulta

$$\frac{1}{x^{2-q}} \left( \partial_x v_\phi + \frac{v_\phi}{x} \right) - \frac{q}{x^{3-q}} v_\phi = 0 \quad (18)$$

cuya integración es inmediata en la forma

$$V_\phi = \frac{v_{\phi*}}{x^{1-q}} \operatorname{sen} \theta \quad (19)$$

donde  $v_{\phi*}$  es la velocidad azimutal en la base del viento en el ecuador estelar ( $\theta = \pi/2$ ). A partir de las expresiones (12) - (17) las restantes componentes de la ecuación (4) resultan en el siguiente sistema de ecuaciones

$$4\kappa v_o \frac{\partial_x \mathcal{H}}{x^{2-q}} = -\partial_x P_1 - P_{GR} \frac{\rho}{\rho_* x^2} \quad (20)$$

$$-4\kappa v_o \frac{\partial_x \mathcal{H}}{x^{2-q}} + q(2-q)\kappa v_o \frac{\mathcal{H}}{x^{3-q}} - \rho \frac{v_{\phi 0}^2}{x^{3-2q}} = -\partial_x P_2 \quad (21)$$

$$-\kappa v_o q \frac{\partial_x \mathcal{H}}{x^{1-q}} - q \left( 1 - \frac{q}{2} \right) \kappa v_o \frac{\mathcal{H}}{x^{2-q}} - \rho \frac{v_{\phi 0}^2}{2x^{2-2q}} = -P_2 \quad (22)$$

donde hemos definido  $P_{GR} = \rho_* GM_* / R_*$ , y  $\rho_*$  como la presión gravitatoria y la densidad en la base del viento  $r = R_* \equiv x = 1$ , respectivamente. Tratemos primero este caso sin velocidad de rotación, esto es, tomemos  $v_{\phi*} = 0$ . Derivando respecto a  $x$  la expresión (22), e

igualando a la ecuación (21), obtenemos la ecuación para la variable  $\mathcal{H}$ .

$$-q \frac{\partial_x^2 \mathcal{H}}{x^{1-q}} + \left(4 - \frac{q^2}{2}\right) \frac{\partial_x \mathcal{H}}{x^{2-q}} - \frac{q^2}{2} (2-q) \frac{\mathcal{H}}{x^{3-q}} = 0 \quad (23)$$

cuya solución es inmediata en la forma

$$\mathcal{H}(x) = Ax^{s_1} + Bx^{s_2} \quad (24)$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  son las raíces del polinomio indicial de la ecuación (23)

$$-qs^2 + \left(4 + q - \frac{q^2}{2}\right)s - \frac{q^2}{2}(2-q) = 0 \quad (25)$$

En la figura 2 mostramos los resultados para valores de  $q$  positivos y negativos. Lo primero que puede observarse es que para valores de  $q$  positivos las dos raíces son positivas. Esto se debe a que la configuración propuesta no tiene líneas cerradas si el parámetro de curvatura es positivo. En lo que sigue trabajaremos entonces con  $q < 0$ , de manera tal que una de las raíces sea positiva y la otra negativa. Por otro lado, puede verse que para valores de  $q$  negativos próximos a cero la raíz positiva diverge muy lentamente, un hecho asociado a que las líneas de flujo se cierran muy lejos de la estrella.

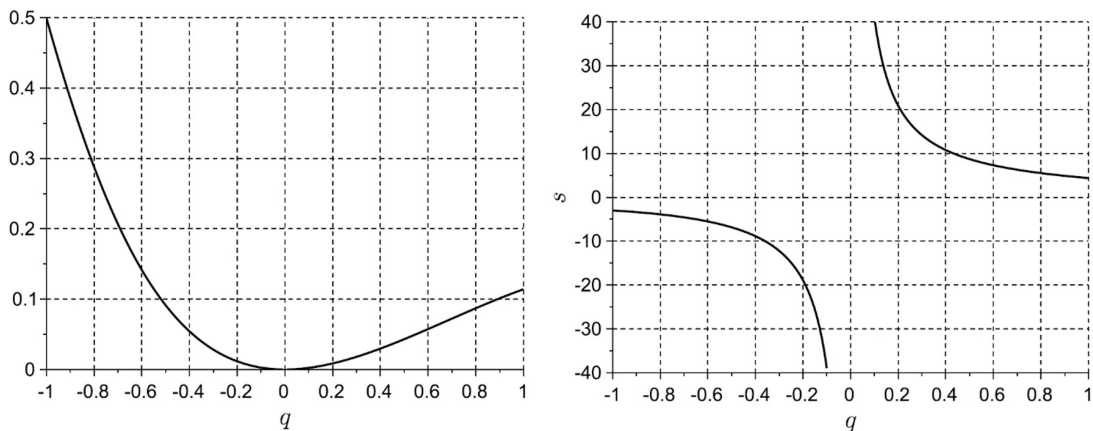


Figura 2: raíces del polinomio indicial (29), mostradas en paneles diferentes por una razón de escala. Obsérvese que para  $q > 0$  las dos raíces son positivas, de modo tal que el flujo no tendría una región de líneas cerradas.

Sean  $s_1 > 0$  y  $s_2 < 0$  las raíces del polinomio indicial, de forma tal que escribimos

$$\mathcal{H}(x) = Ax^{s_1} + Bx^{s_2} \quad (26)$$

de manera tal que de las ecuaciones (13) y (14) resultan inmediatamente

$$v_r = \frac{2\kappa}{\rho x^{2-q}} \cos \theta \equiv 2v_0 H \cos \theta = v_* (Ax^{s_1} + Bx^{s_2}) \cos \theta \quad (27)$$

$$v_\theta = -q \frac{\kappa}{x^{2-q}} \operatorname{sen} \theta \equiv -q \frac{v_*}{2} (Ax^{s_1} + Bx^{s_2}) \operatorname{sen} \theta \quad (28)$$

donde  $v_*$  es la velocidad radial en el polo y en la base del viento ( $\theta=0, x=1$ ). Claramente debemos imponer la condición  $A+B=1$ . De su misma definición (16) se obtiene la expresión de la densidad como

$$\rho = \frac{\kappa}{H x^{2-q}} = \frac{\kappa}{v_0 (Ax^{s_1} + Bx^{s_2}) x^{2-q}} = \frac{\rho_*}{(Ax^{s_1} + Bx^{s_2}) x^{2-q}} \quad (29)$$

donde  $\rho_* = 2\kappa/v_*$  es la densidad en la superficie estelar. Esta función no es necesariamente monótona, porque debemos recordar que  $s_1$  es positiva y  $s_2$  es negativa. Con la condición de borde,  $A+B=1$ , es fácil ver que el extremo de la función  $\rho(x)$  es el punto

$$x : x^{s_1+|s_2|} = \frac{B}{A} \frac{|s_2|-2+q}{s_1+2-q} \quad (30)$$

y que ese extremo, que es un máximo, se encuentra en la región del viento si se cumple

$$\frac{1-A}{A} \frac{|s_2|-2+q}{s_1+2-q} > 1 \equiv 0 < A < \frac{|s_2|-2+q}{s_1+|s_2|} \quad (31)$$

En la figura 3 graficamos la función densidad para  $q=-0,2$ , de donde resultan  $s_1=0,01$  y  $s_2=-20$ , para diferentes combinaciones de las constantes A y B (siempre con la condición de contorno  $A+B=1$ ).

El comportamiento que se observa de la función densidad se debe a la conservación de la masa expresada en la ecuación (2) para un fluido que evoluciona estacionariamente. En coordenadas esféricas y para  $q=-0.2$  (aproximando por  $s_1=0; s_2=-20$ ) debe cumplirse

$$\frac{\partial_r v_r}{v_r} + \frac{2}{r} + \frac{2v_\theta}{rv_r} = -\frac{\partial_r \rho}{\rho} \equiv \frac{-20B}{\left(A + \frac{B}{x^{20}}\right) x^{21}} + \frac{2}{x} \left(1 + \frac{|q|}{2}\right) = -\frac{\partial_x \rho}{\rho} \quad (32)$$

Obsérvese que en la base del viento ( $x=1$ ) el miembro izquierdo es de la forma  $2.2-20B$ , que será negativo (y el miembro derecho también habrá de serlo) si y sólo si  $B > 0.11$ . Es síntesis, las derivadas de la función densidad en las cercanías de la superficie (y hasta un punto definido para cada valor de B por la ecuación (32)) serán positivas para  $B > 0.11$ , que es equivalente a decir  $A < 0.89$ , como expresa la desigualdad (31).



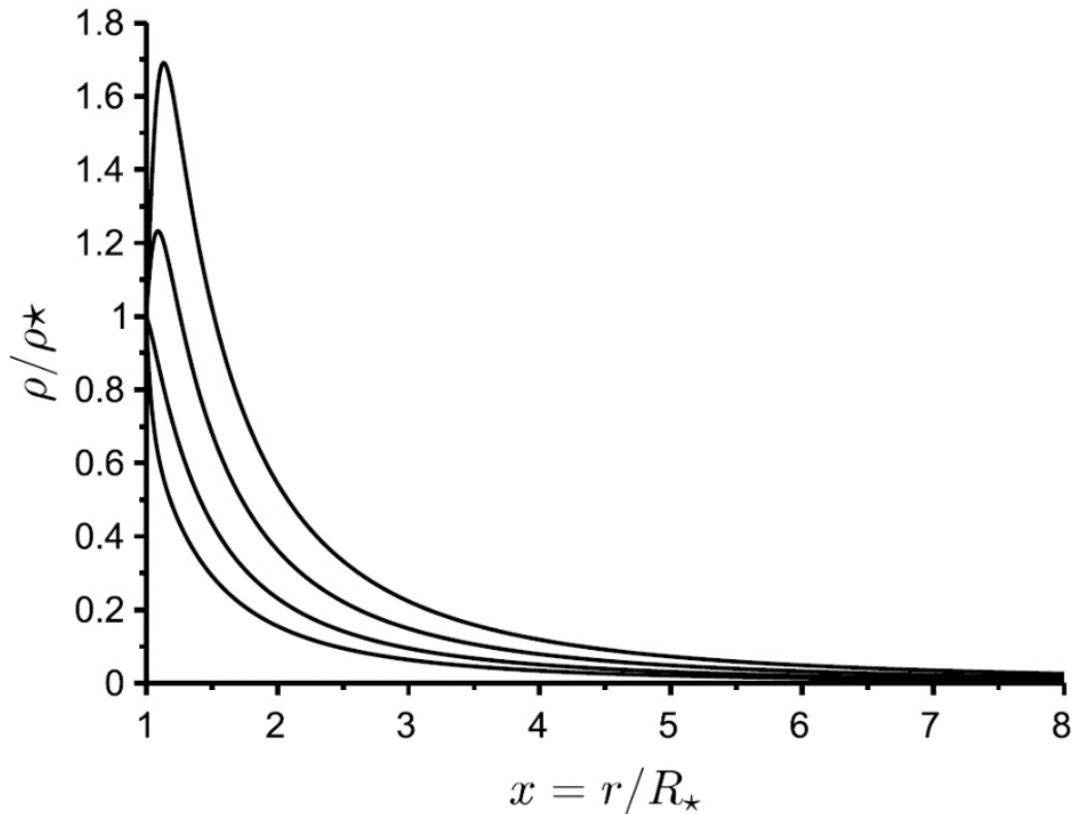


Figura 3: función densidad de masa en términos de la densidad en la superficie para  $q = -0,2$ . De arriba hacia abajo las curvas corresponden a los pares  $(A=0,4; B=0,6)$ ,  $(A=0,6; B=0,4)$ ,  $(A=0,94; B=0,06)$ ,  $(A=1,4; B=-0,4)$ . Puede verse que la función tiene su máximo en la región del viento para  $A < 0,89$ .

Veamos cómo se reflejan estas características en el resto de las funciones. De la expresión (22) resulta automáticamente

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= \kappa v_0 \left[ \frac{q s 2 B x^{s^2-1}}{x^{1-q}} + q \left( 1 - \frac{q}{2} \right) \frac{A x^{s^1} + B x^{s^2}}{x^{2-q}} \right] = \\
 &= q \frac{\chi^2}{4} P_{GR} \left[ \frac{s 2 B x^{s^2-1}}{x^{1-q}} + \left( 1 - \frac{q}{2} \right) \frac{A x^{s^1} + B x^{s^2}}{x^{2-q}} \right]
 \end{aligned} \tag{33}$$

donde hemos escrito, a partir de la ecuación (27) con  $s_1=0$  (en cuyo caso la velocidad terminal del viento,  $v_\infty$ , se expresa como  $v_\infty = A v_*$  o, en términos de la velocidad de escape, como  $v_\infty = \sigma v_{esc}$ )

$$\kappa v_0 = \frac{\rho_* v_0}{2} v_0 = \frac{\rho_* v_*^2}{8} = \frac{\rho_* A^2 v_\infty^2}{8} = \frac{\rho_* A^2 \sigma^2 v_{esc}^2}{8} = \frac{\chi^2}{4} \rho_* \frac{GM_*}{R_*} = \frac{\chi^2}{4} P_{GR}$$

con  $\chi=A\sigma$ . La integración de la ecuación (20) permite obtener la expresión de la presión  $P_1$ . Esta integración tiene dos partes, una analítica, inmediata, y la otra que debe realizarse por otros métodos.

$$\begin{aligned}
 P_1 &= -\int 4v_o \frac{\partial_x \mathcal{H}}{x^{2-q}} dx - P_{GR} \int \frac{\rho}{\rho_* x^2} dx = \\
 &= \chi^2 P_{GR} \frac{Bs2}{(2-s2-q)x^{2-s2-q}} - P_{GR} \int \frac{1}{(Ax^{s1} + Bx^{s2})x^{4-q}} dx
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Llamemos I(x) a la última integral. La forma funcional de esta integral depende de los parámetros A y B, como puede verse en la figura 3. En todos los casos hemos integrado I(x) por métodos numéricos, en dos partes para valores  $A < 0.89$  (hasta  $x=x_M$  y para  $x > x_M$ ). Sin embargo, es fácil ver que la integral es negativa. Para discutirlo, trabajemos con  $q=-0.2$ . Toda vez que sea  $A > 0.89$  (como en las curvas inferiores de la figura 3), I(x) puede pensarse como una función del tipo  $1/x^n$  ( $n > 0$ ), cuya integral claramente es negativa. Para  $A < 0.89$  (como las curvas superiores de la figura 3), I(x) es hasta el máximo una función creciente de derivadas positivas y decrecientes, de manera tal que el desarrollo en serie de potencias alrededor del máximo resulta en una función cuyo término dominante es negativo y, en consecuencia, la integral lo es. Más allá del punto máximo cae como  $1/x^n$  ( $n > 0$ ). Luego, el término  $-P_{GR} I(x)$  es positivo.

A propósito, escribamos las expresiones de la presión (en todos los casos para  $q=-0.2$ ) para algunas curvas particulares. Para  $A=0.6$ ;  $B=0.4$  resultan

$$\frac{P_1}{P_{GR}} = \begin{cases} 1.58x^4 + 2.59x^3 - 19.89x^2 + 24.66x - 1.4 \frac{\chi^2}{x^{22}} & x < 1.09 \\ \frac{13.29}{x^{3.2}} - 1.4 \frac{\chi^2}{x^{22}} & x \geq 1.09 \end{cases}
 \tag{35a}$$

$$\frac{P_2}{P_{GR}} = -\chi^2 \left[ \frac{0.033}{x^{2.2}} - \frac{0.322}{x^{22}} \right]
 \tag{35b}$$

en tanto que para  $A=1.4$ ;  $B=-0.4$  resultan

$$\frac{P_1}{P_{GR}} = \frac{0.225}{x^4} - \frac{0.020}{x^5} + \frac{0.087}{x^{2.3}} + 0.363 \frac{\chi^2}{x^{22}}
 \tag{36a}$$

$$\frac{P_2}{P_{GR}} = -\chi^2 \left[ \frac{0.077}{x^{2.2}} - \frac{0.377}{x^{22}} \right]
 \tag{36b}$$

Las formas (35.a) y (36.a) las hemos obtenido después de desarrollar Taylor la función I(x) hasta el tercer orden, porque las diferencias con órdenes superiores eran mucho menores que la diferencia entre el valor real y el de tercer orden. En la figura 4 mostramos la presión

$P_1$  en términos de la presión gravitatoria para los valores de los parámetros de las expresiones (35.a) y (36.a)

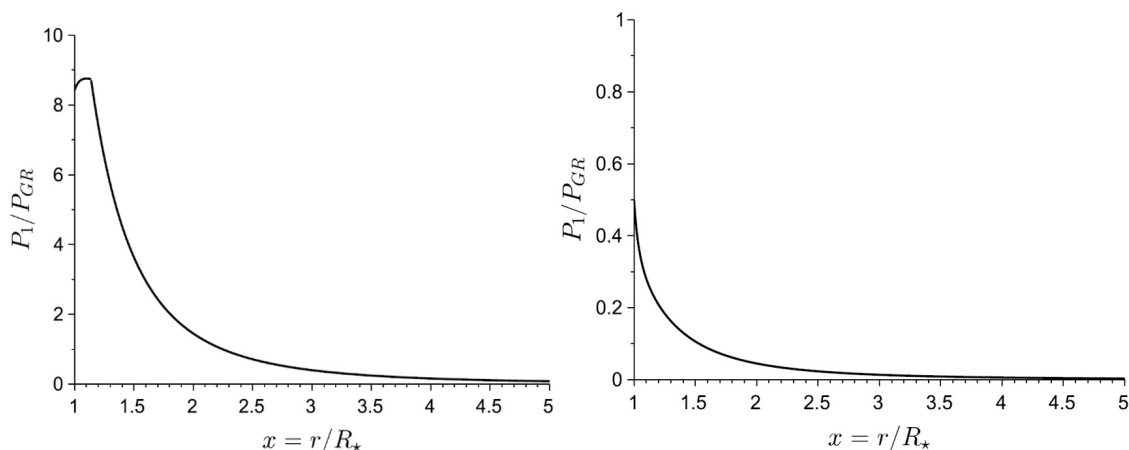


Figura 4: presión polar  $P_1$  para  $(A=0.6; B=0.4)$  a la izquierda, y  $(A=1.4; B= - 0.4)$  en la gráfica de la derecha. Obsérvese que en el primer caso, a diferencia del segundo, el viento arranca con una velocidad mayor que la velocidad terminal. En ambos casos hemos usado  $\chi=A$  ( $u=1$ ).

La temperatura polar que resulta del modelo se muestra en la figura 5. Elegimos la temperatura polar porque en esa región la temperatura es máxima en los dos modelos que mostramos. Más allá de los valores iniciales, puede verse la diferencia que se da en las formas en que decae la función, y claramente se corresponde con el hecho de que en el primer caso ( $A=0.6$ ) ni la presión ni la densidad son funciones monótonas. De hecho, una delgada capa límite (del orden de algunas centésimas de radio estelar) podría existir en las inmediaciones del superficie en la que la temperatura se eleva antes de disminuir.

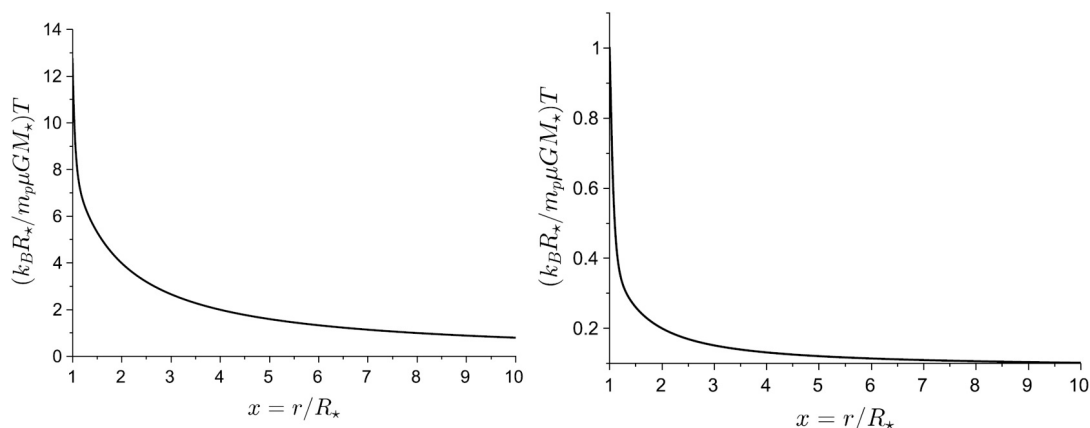


Figura 5: marcha de temperatura polar para  $A=0.6$  (panel izquierdo) y  $A=1.4$  (panel derecho). Aunque morfológicamente iguales, la diferencia esencial entre ambas curvas es que, al menos hasta 3 radios estelares, la derivada de la función en el segundo caso es mucho mayor.

Para analizar el comportamiento termodinámico del viento partamos de la ecuación (5). La distribución de fuentes y sumideros de energía que resulta, aunque coherente, nada dice del origen de esas fuentes o sumideros. Sin embargo podemos echar un poco de luz sobre su forma si consideramos un índice politrópico  $\gamma > 0$  constante y analizamos la situación a partir de la componente polar de la ecuación (5), que después de un álgebra más bien tedioso puede escribirse como

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \left( \frac{\mathcal{P}}{(\gamma-1)\rho} \right) + \mathcal{P} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \left( \frac{1}{\rho} \right) \Big|_{\theta=0} = \frac{v_r}{\rho} \left\{ \frac{1}{\gamma-1} \partial_x P_1 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho} \partial_x \rho \right\} = Q_p(x) \quad (37)$$

donde  $Q_p$  representa la distribución de fuentes térmicas a lo largo del eje polar. Claramente, en este caso, el signo de  $Q_p$  depende exclusivamente de las derivadas de la densidad y de la presión. Obsérvese que el índice politrópico efectivo  $\gamma$  se define como

$$\gamma = 1 + \frac{d(\ln T)}{d(\ln)} \Big|_{S=cte} \equiv \frac{1}{T} dT = \frac{(\gamma-1)}{\rho} d\rho \quad (38)$$

y en este contexto, con una función temperatura decreciente el miembro derecho debe ser negativo. Luego, para  $A=0.6$ , en la región  $1 \leq x \leq 1.1$  debe ser  $\gamma < 1$  porque la densidad es creciente. En cambio, en la región  $x > 1.1$  debe ser  $\gamma > 1$  (aunque por supuesto los procesos siguen siendo de enfriamiento). En la figura 6 graficamos las curvas correspondientes a  $\partial_x P_1 / P_1$  y  $\partial_x \rho / \rho$  hasta y desde el máximo de la función de presión. Puede observarse que hasta el punto cuspidal el valor del índice politrópico debe estar por debajo de un cierto valor para que la distribución de fuentes sea monótona, en tanto que por encima del punto de valor máximo de la función debe ser  $\gamma \gtrsim 5/3$ . Debería compararse esta solución con la que obtuvo Parker (1963) en un modelo esféricamente simétrico del viento solar, que significa que el gradiente de presión se equilibra con el peso del plasma, y que éste entonces evoluciona con velocidad constante. Tengamos en cuenta además que una distribución de sumideros significa que el plasma se enfría mientras evoluciona, y este enfriamiento es el que reduce la presión en la región del viento.

Con todo, las temperaturas iniciales son mayores a las que podrían esperarse, y el problema parecería ser la ausencia de alguna fuerza disipativa eficiente (efectos que analizaremos en la parte II d este trabajo) aunque está también relacionado con la curvatura de las líneas y la rotación del plasma. Para analizar las diferencias entre un modelo y otro plantearemos a continuación el problema con  $q=0$  y  $v_\phi \neq 0$ . Para ello reescribamos a las ecuaciones (18) – (22) en el caso que nos interesa

$$\frac{1}{x^2} \left( \partial_x v_\phi + \frac{v_\phi}{x} \right) = 0 \quad (39)$$

cuya integración es inmediata en la forma

$$v_\phi = \frac{v_{\phi*}}{x} \text{sen } \theta \quad (40)$$

donde, de nuevo,  $v_{\phi^*}$  es la velocidad azimutal en la base del viento en el ecuador estelar ( $\theta=\pi/2$ ). A partir de las expresiones (20) – (22) obtenemos

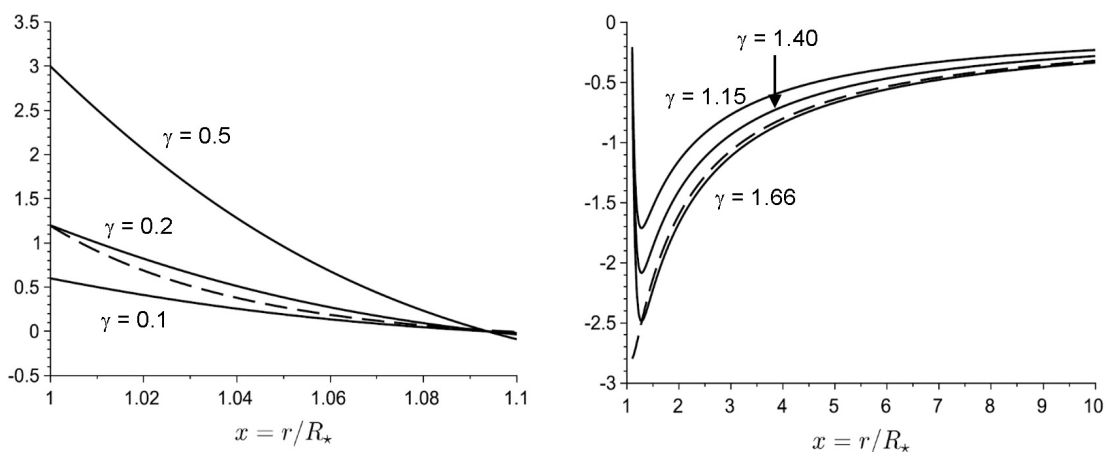


Figura 6: derivadas logarítmicas de la ecuación (37) para  $A=0.6$  hasta el máximo de la función ( $x=1.09$ ) y a partir de este punto. La curva de líneas corresponde en ambos paneles a derivada logarítmica de la presión. Obsérvese que hasta el máximo de presión, el índice politrópico debe ser menor que 1.15 para que la distribución de fuentes se corresponda con una sucesión de sumideros y el consiguiente enfriamiento.

$$\frac{4\kappa^2}{x^2} \partial_x \left( \frac{1}{\rho x^2} \right) = -\partial_x P_1 - P_{GR} \frac{\rho}{\rho_* x^2} \quad (41)$$

$$-\frac{4\kappa^2}{x^2} \partial_x \left( \frac{1}{\rho x^2} \right) - \rho \frac{v_{\phi^*}^2}{x^3} = -\partial_x P_2 \quad (42)$$

$$P_2 = \frac{\rho v_{\phi^*}^2}{2x^2} \quad (43)$$

La familia de funciones

$$\rho = \frac{\rho_*}{x^2 \sqrt{\beta^2 \left( \frac{1}{x^2} - 1 \right) + 1}} \quad (44)$$

donde  $\beta = v_{\phi^*} / v_*$ , es solución. De hecho, para  $\beta=1$  resulta  $\rho \sim 1/x$ , y sin necesidad de resolver las ecuaciones, es fácil ver que en tal caso la velocidad y la presión al infinito decaen monótonamente como  $1/x$  y como  $1/x^3$  respectivamente. Y esta es la diferencia esencial entre los dos modelos. Cuando el flujo no es totalmente radial la fuerza inercial asociada a la curvatura de las líneas interactúa con el gradiente de presión en la dirección polar y modifica las soluciones porque se transforma en un problema no degenerado. De hecho, sin

velocidad rotacional el caso de curvatura nula queda sobredimensionado.

#### 4. Comentarios y conclusiones

Hemos desarrollado en este artículo las soluciones hidrodinámicas de un plasma empujado sólo por la presión interior de una estrella en contra de la contracción gravitatoria. Para ello hemos debido fijar de antemano, y en base a criterios observacionales, la topología de las líneas de flujo. Si bien en un principio esa topología podría parecer arbitraria, lo cierto es que, más allá de la evidencia observacional, es absolutamente plausible. De hecho, es el tipo de topología que suele asociarse al campo magnético cuando se lo incluye en el tratamiento.

Sin embargo aparece ya una diferencia esencial entre un tratamiento y otro. Hemos resuelto el problema para un flujo a lo largo de líneas rectas ( $q=0$ ) y debimos hacerlo incluyendo velocidad de rotación. Si se incluye un campo magnético con idéntica geometría (Low y Tsinganos, 1986) el problema admite soluciones (sencillas) sólo si se considera rotación nula. Y esta diferencia se debe naturalmente a que la cantidad de ecuaciones que resultan en ambos tratamientos es la misma. Sin embargo debe tenerse en cuenta que la cantidad de energía inicial se reparte entre la velocidad poloidal y la rotacional. En un campo de velocidades puramente radial la cantidad de movimiento se transfiere sólo en la dirección radial, de ahí a que la introducción de rotación reduzca los efectos térmicos, porque parte del momento se utiliza en la rotación y no sólo en la componentes poloidales de la velocidad. Sin embargo las temperaturas basales resultan todavía elevadas, un hecho que, como ya dijimos, se debe fundamentalmente a la ausencia de mecanismos de empuje (como podría ser la presión de radiación), de mecanismos de disipación efectiva (disipación viscoso-turbulenta, disipación resistiva) o de mecanismos que contribuyan a conducir el flujo (campos magnéticos). Estas características se reflejan en el comportamiento del índice politrópico asociado a la termodinámica del viento, que para mantener el flujo después de la primera expansión el gas debe enfriarse. Cabe mencionar que la expresión general de la velocidad de rotación es idéntica a la que se hallan en otro tipo de modelos, y esto se debe a que raramente se consideran fuerzas azimutales.

En los casos analizados las temperaturas que se derivan del modelo son del orden de dos órdenes de magnitud mayores que las observadas para el tipo de objetos bajo estudio, o deberíamos pensar en elevadas velocidades iniciales del viento que no se observan en estos objetos. Esto se debe fundamentalmente a que el gradiente de presión debe ser muy grande para iniciar y mantener el flujo cerca de la superficie y, o bien ya arranca con valores elevados de velocidad, o bien cuando se desacelera transforma la energía cinética en térmica y provoca la sobre elevación de la temperatura.

En consecuencia parece razonable pensar en otros mecanismos de sustentación y empuje, y de disipación. Esto es lo que proponemos para las partes II y III de este trabajo, en el que emplearemos una sencilla formulación basada en la teoría de longitudes características de mezcla (*mixing length*) para modelizar la transferencia de momento mediante una suerte de viscosidad turbulenta originada en procesos turbulentos promediados y resistividad nula para considerar las escalas de disipación.

## Referencias

- Braithwaite, J; Spruit, H (2017): Magnetic fields in non-convective regions of stars. R.Soc. DOI 10.1098/rsos.160271.
- Cantiello, M; Braithwaite, J (2019): *Astrophys. J*, **883**, 106. DOI 10.3847/1538-4357/ab3924
- Cassinelli, J; Brown, J; Maheswaran, M; Miller, N; Telfer, D. (2002): *Astrophys. J*, **578**, 951. DOI 10.1086/592558
- Clark, S; Oishi, J (2017): *Astrophys. J*, **841**, 1. DOI 10.3847/1538-4357/aa6ff6
- Donati, J.-F., & Landstreet, J. D. (2009): *ARA&A*, **47**, 333. DOI 10.1146/annurev-astro-082708-101833
- Lamers, H; Levesque, E (2017): Stellar Winds and Mass Loss, chapter 15, pages 15-1 to 15-12, in Understanding Stellar Evolution, Chapter DOI 10.1088/978-0-7503-1278-3ch15, IOP Publishing Ltd.
- Kudritzki, R (2002): *Astrophys. J*, **577**, 389. DOI 10.1086/342178
- Low, B; Tsinganos, K (1986): *Astrophys. J*, **302**, 163. DOI 10.1086/163980
- Parker, E (1963) : Interplanetary Dynamical Processes (New York, Interscience Publishers)
- Rivinius, T; Calcio, A; Martayan, C. (2013): *Astron. Astrophys. Review*, **21**, article 69.
- Rotstein, N (2011): "Flujos magnetohidrodinámicos axisimétricos con conductividad finita I. Geometría esférica" *Proyecciones*, **9**, 27-39.
- Rotstein, N; Ferro Fontán, C (1995): *Astrophys.J*, **449**, 745 DOI 10.1086/176095
- Schöller, M; Hubrig, S; Ilyin, I; Kharchenko, N; Briquet, M; Gonzalez, J; Langer, N; Osnikova, L; the MAGORI Collaboration (2011): *Astronomische Nachrichten*, **332**, 994.
- Townsend, R; Owocki S. (2005): *MNRAS*, **357**, 251. 10.1111/j.1365-2966.2005.08642.x
- ud- Doula, A; Owocki, S; Townsend, R (2008): *MNRAS*, **385**, 97. DOI 10.1111
- ud- Doula, A; Sundqvist, J; Owocki, S; Petit, V; Townsend, R. (2013): *MNRAS*, **428**, 2723. DOI 10.1093/mnras/sts246