

Estudio del Contacto entre dos Cuerpos con Superficies Rugosas a Través del Método de los Elementos Finitos

Resumen: El presente trabajo se propone analizar la aplicación de una herramienta de software basada en lógica difusa, para la identificación de la localización sustentable de cuatro parques industriales ubicados en la provincia de Córdoba. Siendo la localización un estudio de soluciones múltiples, puede existir más de una localización factible adecuada que puede hacer sustentable el proyecto.

El software sobre el que se basa principalmente este estudio es el Expert Choice V11 que utiliza el Proceso Jerárquico Analítico (AHP, Analytic Hierarchy Process). El AHP permite combinar la percepción humana, las preferencias y la experiencia para priorizar opciones en situaciones complejas como las estudiadas en el presente trabajo.

Luego de aplicar el software para los estudios de localización se pudo apreciar la utilidad y las fortalezas del mismo como soporte de decisión para la localización de parques industriales.

Palabras Claves: Parques industriales, desarrollo sustentable, decisión, localización.

Abstract: This paper analyzes the implementation of a software tool based on fuzzy logic to identify the sustainable location of four industrial parks in the province of Córdoba.

Being the location study of multiple solutions, there may be more than one possible location that can make the project sustainable.

Primarily the software on which this study is based is the Expert Choice V11 that uses the Analytic Hierarchy Process (AHP). The APH combines human perception, preferences and experience to prioritize options in complex situations such as those presented in this paper.

After applying the software in localization studies could assess its usefulness and the strengths as decision support for the location of industrial parks..

Keywords: Industrial parks, sustainable development, decision, location.

Pablo Modini

Grupo de Investigación en Métodos Numéricos en Ingeniería - GIMNI, Facultad Regional Santa Fe, UTN

E-mail de contacto: pablomodini@gmail.com

Este trabajo ha sido realizado bajo la dirección del Dr. Federico José Cavalieri, en el marco del proyecto "Estudio de Desgaste en Componentes Mecánicos a través del Método de Elementos Finitos PIDUTN3527".

INTRODUCCIÓN

Los problemas que involucran el contacto mecánico tienen gran relevancia en actividades relacionadas con la ingeniería mecánica, civil y la bio-ingeniería, pudiendo citarse el diseño de engranajes (Gomez-Montero et al. 2005), procesos de embutición (Bathe 2004), fatiga por contacto (Madge et al. 2007), entre otras.

Unos de los objetivos de resolver en forma precisa el contacto, consiste en comprender cómo influyen las deformaciones y las tensiones en el funcionamiento de un determinado componente. Por ejemplo, el proceso de desgaste que condiciona la vida de un sistema mecánico depende principalmente de la presión de contacto generada (Archard 1957).

Estudios experimentales a escalas muy reducidas han demostrado que, las características de las presiones de contacto están relacionadas con las propiedades de la compleja textura de la interfaces en contacto, condiciones de operación, dureza, tipo de materiales y tratamientos de endurecimiento superficial (Kragelsky et al. 1982).

La realización de ensayos experimentales resulta de gran utilidad para la optimización de diseños, pero no permite aislar los efectos a un nivel micro y analizarlos individualmente, lo que dificulta la predicción de las dependencias que existen entre ellos. Algunas formulaciones teóricas tales como las que se presentan en los trabajos de (Greenwood y Williamson 1966), (Zavarise et al. 1992) y (Kragelsky et al. 1982) estudian el contacto entre dos cuerpos teniendo en cuenta la rugosidad superficial. En el caso del modelo de (Greenwood y Williamson 1966), se asume que el radio de curvatura de las asperezas de las interfaces de contacto se mantiene constante. En la práctica, se utiliza un radio de curvatura promedio que se determina a partir de mediciones de la rugosidad de la superficie (McCool 1986). Como se menciona en (Majumdar y Bhushan 1990), la utilización de un solo radio de curvatura es

algo ambiguo y es dependiente de la escala con que se está midiendo el radio.

Como alternativa a los experimentos físicos y soluciones analíticas, la simulación numérica permitiría separar y analizar con relativa facilidad los diferentes procesos y parámetros que intervienen en el contacto, y ofrecer una visión detallada de los factores más influyentes donde las soluciones analíticas o experimentales resulten limitadas o inaplicables. Sin embargo, en el caso de que se desee estudiar macroscópicamente el contacto mecánico considerando la rugosidad, efectos de lubricación, etc., resulta una tarea difícil de ser modelada debido a que el sistema de ecuaciones resultante es altamente no lineal y puede estar mal condicionado. Un camino posible para superar estas dificultades consiste en el desarrollo de nuevos modelos fenomenológicos que incluyan un gran número de variables internas capaces de capturar macroscópicamente los mecanismos microscópicos más relevantes.

La principal limitación de esta metodología radica en la dificultad asociada con la caracterización de las leyes de evolución de las variables internas adicionales y, desde el punto de vista de la mecánica computacional, una mayor cantidad de variables internas generan un aumento en la dimensión del problema que se requiere resolver, agregando mayores costos computacionales y dificultades a la solución. Una segunda alternativa consiste en la adopción de modelos de contacto mediante los cuales la información microscópica puede ser incorporada en las descripciones macroscópicas utilizando técnicas de homogeneización o promediado, similar a la que se utiliza en modelos constitutivos de materiales (Hill 1966).

En el marco del Método de los Elementos Finitos (MEF) existen múltiples aproximaciones para el estudio del contacto. Desde un punto de vista de la descripción cinemática del contacto, una técnica ampliamente difun-

didada es la del nodo-superficie, en la cual un nodo de la superficie de un cuerpo, al que se lo denomina esclavo, se relaciona con una superficie del otro cuerpo, al que se lo denomina maestro (Parisich 1989). Otra aproximación es la de los métodos superficie-superficie, que en su mayoría utilizan alguna clase de superficie intermedia, o proyección de superficie, e integran el trabajo virtual asociado al contacto con alguna interpolación en la presión. En este contexto, el método superficie-superficie tipo mortario permite obtener tensiones de contacto de variación espacial suave, con respecto a los nodo-superficie, con lo cual se mejora la precisión con que se estiman las presiones de contacto (Cavalieri et al. 2012).

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar el comportamiento micro-mecánico a través del MEF y

técnicas de homogeneización, con el objetivo final de obtener una ley que relacione las presiones de contacto y la rugosidad, en un determinado par bimetálico. Para ello, se propuso una geometría lo suficientemente pequeña para mantener ciertas características de rugosidad de las superficies propuestas. La superficie rugosa fue generada desplazando los nodos de la superficie de contacto del modelo por medio de un algoritmo programado en Matlab (Mathworks 2012). Luego, mediante una aproximación de contacto tipo mortario basado en un Lagrangiano Aumentado (Cavalieri y Cardona 2012), se registraron las presiones de contacto y la distancia a los planos medios de las superficies rugosas. Finalmente, se obtuvo una relación cuadrática entre las presiones de contacto y la distancia media de las superficies rugosas.

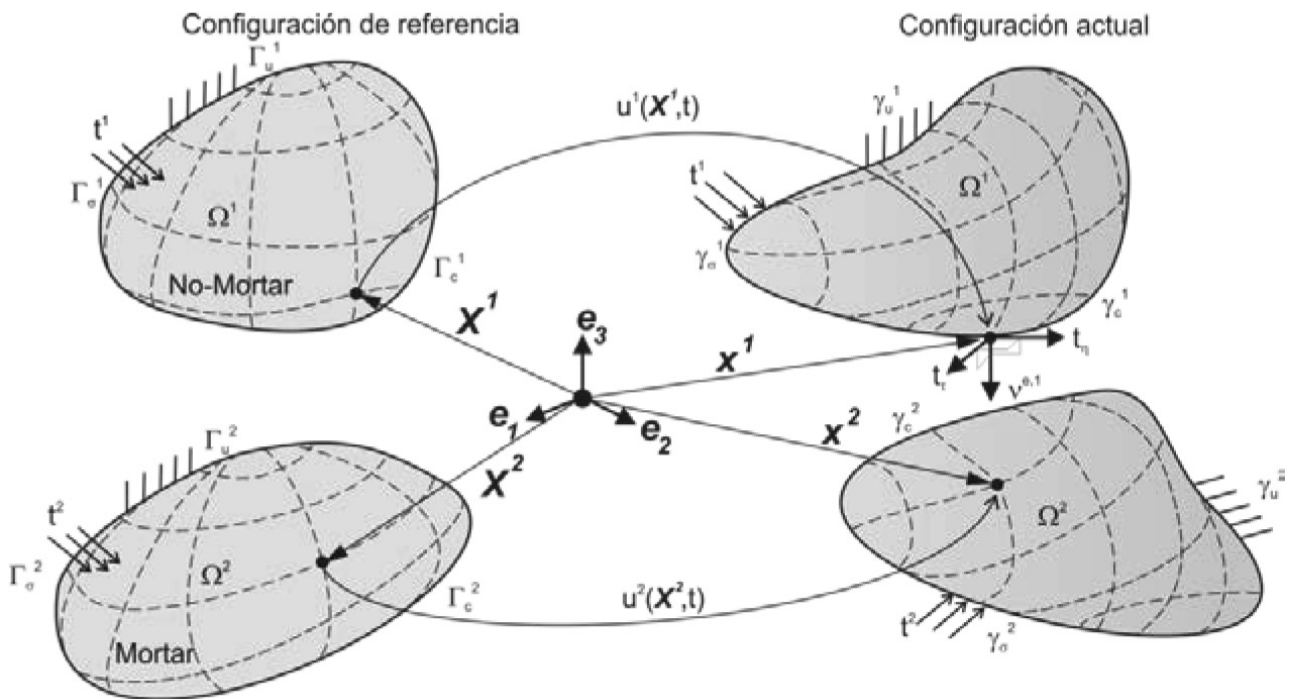


Figura 1. Notación utilizada en el método mortario para los cuerpos en contacto.

METODOLOGÍA

Descripción del Problema y del algoritmo de Contacto Utilizado

El movimiento de dos cuerpos contactores B^α con $\alpha=1,2$ se expresa por el mapeo $X^\alpha: \Omega^\alpha \times [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, y la posición actual de las partículas materiales se calcula como $x^\alpha = X^\alpha(X^\alpha, t)$. La porción de la frontera de contacto Γ_c en la configuración de referencia está dada por una intersección de las superficies Γ_c^α , lo que sería $\Gamma_c = \Gamma_c^1 \cap \Gamma_c^2$, ver *Figura 1*. Las mismas fronteras en la configuración actual son γ_c^1 y γ_c^2 . La convención adoptada en este trabajo para la definición de las superficies mortario y no mortario es la siguiente: supra-índice 1 denota la superficie no-mortario o esclava, en tanto que supra-índice 2 representa la superficie mortario o maestro.

La discretización del dominio se realiza mediante el Método de Elementos Finitos, de esta forma la malla de la superficie en contacto puede ser parametrizada como:

$$x^\alpha = \sum_{A=1}^{n^\alpha} N_A^\alpha(\xi^\alpha) x_A^\alpha \tag{1}$$

donde $x^\alpha \in \Gamma_c^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x_A^\alpha \in \Gamma_c^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$, son las coordenadas locales, n^α es el número de nodos de la malla en Γ_c^α y $N_A^\alpha: \Gamma_c^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ son las clásicas funciones de forma, y ξ^α son las coordenadas locales. El vector de coordenadas nodales en \mathbb{R}^3 para las superficies de contacto se define como:

$$\phi = [x_1^1 x_2^1 \dots x_n^1 x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2]^T \tag{2}$$

Notar que ϕ se ordena de forma tal que en las primeras componentes se encuentran las coordenadas de los nodos referidos a la frontera 1 (no mortario) y luego las correspondientes a la frontera 2 (mortario).

Cuando los cuerpos B^1 y B^2 interactúan mecá-

nicamente sobre la superficie en donde se efectúa el contacto, la energía potencial de contacto queda definida por:

$$\Pi^C = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\gamma_c^\alpha} t^\alpha \cdot x^\alpha d\gamma \tag{3}$$

donde t^α es el vector de tracción de Cauchy. La ecuación (3) puede reescribirse asumiendo que existe conservación de la cantidad de movimiento lineal en la interfaz de contacto $t^1 d\gamma_c^1 = -t^2 d\gamma_c^2$, entonces,

$$\Pi^C = \int_{\gamma_c^1} t^1 \cdot (x^1 - x^2) d\gamma \tag{4}$$

y si se incluyen las parametrizaciones de las superficies de contacto y la del vector de tracción como $t = \sum_{A=1}^{n^1} N_A^1 \xi^1 t_A^1$, entonces la energía potencial de contacto sin tener en cuenta los efectos de fricción se aproxima de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Pi^C = & \sum_{A=1}^{n^1} t_{NA} v_A \cdot \left(\sum_{B=1}^{n^1} \int_{\gamma_c^1} N_A^1(\xi^1) N_B^1(\xi^1) d\gamma x_B^1 - \right. \\ & \left. \sum_{C=1}^{n^2} \int_{\gamma_c^1} N_A^1(\xi^1) N_C^2(\xi^2) d\gamma x_C^2 \right) \end{aligned} \tag{5}$$

Siendo v_A el vector normal a la interface de contacto no mortario del nodo A. Luego, la interpenetración g_A se define como

$$g_A = \sum_{B=1}^{n^1} \int_{\gamma_c^1} N_A^1(\xi^1) N_B^1(\xi^1) d\gamma x_B^1 - \sum_{C=1}^{n^2} \int_{\gamma_c^1} N_A^1(\xi^1) N_C^1(\xi^1) d\gamma x_C^2 \tag{6}$$

Finalmente, la energía potencial de contacto escrita de forma compacta resulta

$$\Pi^C = \sum_{A=1}^{n^1} t_{NA} g_{NA} \tag{7}$$

La solución al problema de contacto sin fricción,

obtenido para una formulación mortar se escribe como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= \operatorname{arginf} \left(\Pi^{\text{int}}(\mathbf{U}) + \Pi^{\text{ext}}(\mathbf{U}) + \Pi^c(\mathbf{U}) \right) \quad (8) \\
 \text{s.a } &g_{NA} \geq 0 \quad t_{NA} \geq 0 \\
 &t_{NA} a_{NA} = 0 \quad A = 1, \dots, n^1
 \end{aligned}$$

donde $\Pi^{\text{int,ext}}(\mathbf{U})$ es la energía potencial debido a las cargas exteriores e interiores, y \mathbf{U} es el vector global de desplazamientos. La segunda línea de la ecuación (8) establece las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el contacto, las que se expresan en la forma discreta para el nodo A. La ecuación (8) puede regularizarse por medio de una aproximación dual mixta tal como se propone en (Cavaliere y Cardona 2012).

Procedimiento de Homogeneización

Parar llevar a cabo el proceso de homogeneización, se proponen dos sólidos ubicados como se muestra en la Figura 2 con una determinada rugosidad en la interface de contacto. Al cuerpo superior se le impone un desplazamiento, en tanto que al cuerpo inferior se le restringen todos los movimientos en su cara inferior.

El algoritmo de contacto mortar presentado en la sección 2.1 y el resolvidor del sistema de ecuaciones fue modificado para que en cada paso de tiempo se calcule la distancia d entre los planos medios de las superficies rugosas, como así también la resultante de las reacciones R_N de cada nodo k , donde fue impuesto desplazamiento, ver Figura 2. Entonces,

$$R_N = \sum_k R_{Nk} \quad (9)$$

Considerando el equilibrio entre los cuerpos, es claro que la fuerza de contacto normal $F_N = \sum_{k=1}^{n^1} \int_{\gamma^1} t_N d_\gamma$, donde los picos de la superficie rugosa se tocan, tiene que ser igual a las reacciones normales que se generan en la cara de área A , donde el despla-

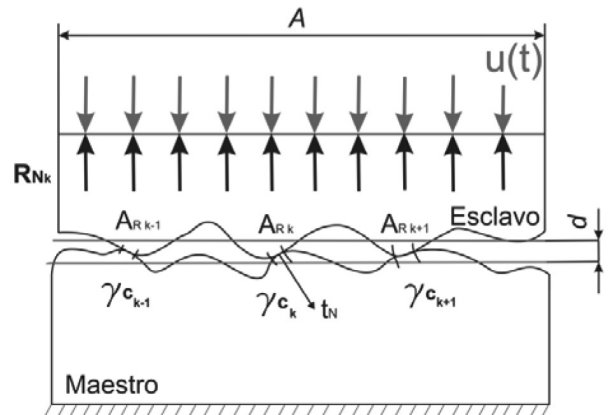


Figura 2. Interfaz de contacto.

miento es impuesto. esto es

$$F_N = R_N \quad (10)$$

Entonces, la fuerza resultante R_N puede ser utilizada junto con el área A de todo el cuerpo para obtener una presión de contacto media,

$$p_N = \frac{R_N}{A} \quad (11)$$

Este procedimiento es conocido como homogeneización de las presiones de contacto. Luego, puesto que R_N depende de la distancia media d , entonces la presión de contacto se relaciona con alguna ley que es necesario determinar,

$$p_N = p_N(d) \quad (12)$$

La formulación que se propone en este trabajo es aplicable a problemas donde las fuerzas de fricción no afectan considerablemente a la distribución de presión. Esta limitación es utilizada por otros autores (Sfantos y Aliabadi 2007), y es válida para una amplia gama de aplicaciones de ingeniería (Johnson 1987). La simplificación de no considerar los efectos de fricción, produce una formulación más simple con mejores propiedades de convergencia del problema no lineal. Es claro que, el rango

de aplicación de la formulación queda restringido, sin embargo, la incorporación de las ecuaciones de fricción no implica una modificación sustancial al código desarrollado.

Generación de Superficies de Contacto rugosas

Para la generación de una superficie de contacto rugosa, se diseñó un algoritmo especial en MatLab donde los nodos de la interface, previamente importados de un archivo de datos generado en un programa de elementos finitos, son desplazados siguiendo una determinada función. Por ejemplo, en este trabajo se propone.

$$Z'(x,y) = Z + A_m \left[\sin\left(350000 \frac{\pi}{180} (x+y)\right) + \cos\left(350000 \frac{\pi}{180} (x+y)\right) \right] \quad (13)$$

donde Z' es la coordenada modificada de un nodo de la cara que entrará en contacto y A_m es la amplitud de la rugosidad. El sistema de ejes cartesianos utilizado para generar la ecuación (13) se muestra en la Figura 4, izquierda. La forma de la ecuación (13), puede ser modificada en función de los resultados obtenidos mediante mediciones con perfilómetros para que represente con mayor exactitud la topología de una superficie de una pieza determinada sobre la que se desea estudiar el contacto. En particular, la ecuación (13) con un valor de $A_m=3[\mu\text{m}]$ representa una rugosidad periódica con una amplitud similar a la obtenida luego de un proceso de rectificado (Rodríguez Montes et al. 2006). Una gráfica de la superficie rugosa obtenida por medio de la ecuación (13) se muestra en la Figura 3.

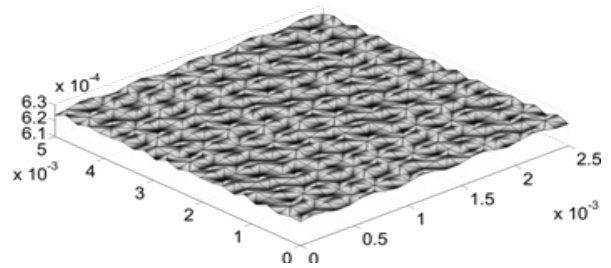


Figura 3. Modelo de superficie de contacto rugosa.

Para el modelado de la rugosidad se desarrolló el código que se presenta a continuación:

```

1. Nodes= load('Master.txt');
2. NodesNew=Nodes;
3. N=length(Nodes); % número de nodos.
4. for i=1:N
5.     if Nodes(i,4)==0.000625
6.         X=Nodes(i,2);
7.         Y=Nodes(i,3);
8.         Z=Nodes(i,4)+0.000003*(sin(350000*(3.14/180)*(X+Y))*cos(350000*(3.14/180)*(X+Y)));
9.         NodesNew(i,4)=Z;
10.    end
11. end
12. fid =
    fopen('Matrizomastermodificado.txt','wt');
13. for i = 1:N
14. fprintf(fid,'%d, %12.8f, %12.8f, %12.8f;\n',
    NodesNew(i,1),NodesNew(i,2),NodesNew(i,3),NodesNew(i,4));
15. end
    
```

En la primera línea se cargan las coordenadas de todos los nodos de las mallas de cada uno de los cuerpos, que se obtienen del archivo de datos generado por un programa de elementos finitos. Luego, para el número total de nodos dado en la línea 3, se realiza un bucle dentro del cual se rastrean los nodos que tengan por valor de coordenada en Z el correspondiente a la superficie a hacer contacto. Para dichos nodos, la coordenada Z es modificada en función de sus coordenadas X e Y, siguiendo la ley de la línea 8 y los resultados se sobrescriben en la matriz NodesNew.

Finalmente la matriz modificada es impresa en un archivo de texto con el fin de que sustituya luego a la matriz original en el juego de datos a analizar numéricamente.

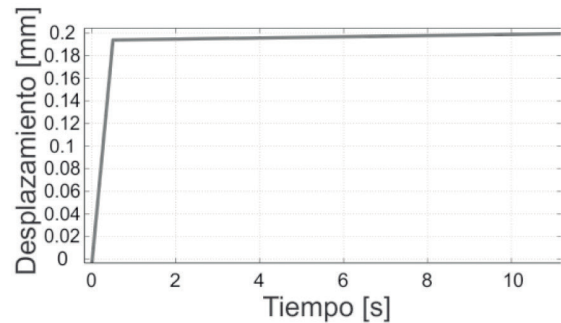
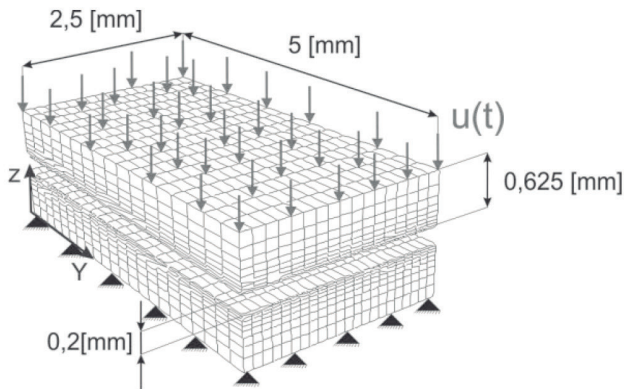


Figura 4. Izquierda: topología de la malla y condiciones de borde propuestas. Derecha: ley propuesta para el desplazamiento impuesto en la cara superior.

Ejemplo Numérico

Para este trabajo, la geometría de los dos sólidos fue creada en el código de elementos finitos Oofelie (Cardona et al. 1994). Se utilizaron elementos finitos estándar hexaédricos, refinando la malla en la zona de contacto. Las dimensiones de los cuerpos, la topología de la malla propuesta, y las condiciones de borde son las que se muestran en la Figura 4, izquierda.

Un aspecto importante a tener en cuenta es que las dimensiones de los cuerpos se eligen de modo de poder captar con cierta regularidad la geometría de la superficie rugosa. Ambos cuerpos se propusieron con un comportamiento elástico lineal con un módulo de Elasticidad $E=2,1e11$ [Pa] y un coeficiente de Poisson $\nu=0,3$.

Las simulaciones de contacto se efectuaron posicionando un cuerpo por encima del otro, de tal forma que el cuerpo superior, se acerque al inferior con un campo de desplazamientos impuesto $u(t)$, ver Figura 4, derecha. Notar que en los primeros 0.5 segundos el desplazamiento impuesto presenta una pendiente mucho mayor que en el resto del tiempo. Esto se debe a que hasta los 0.5 segundos, los cuerpos no entran en contacto, y para economizar tiempos y recursos computacionales, se utiliza dicha pendiente en los

primeros 5 pasos de tiempos. El resto de la simulación se realizó en un intervalo de tiempo de 9 segundos, con un paso de tiempo de 0.05 segundos.

METODOLOGÍA

A partir de los resultados numéricos se observa que la relación entre la presión media de contacto y la distancia a los planos medios es la que se muestra en la Figura 5.

La curva de la Figura 5 indica que a medida que la distancia entre los planos medios disminuye la presión de contacto se incrementa. Notar que el valor máximo de la presión media no supera la tensión de fluencia del acero (Mott 2006), por lo que el material no plástica y la ley de Hooke no pierde validez.

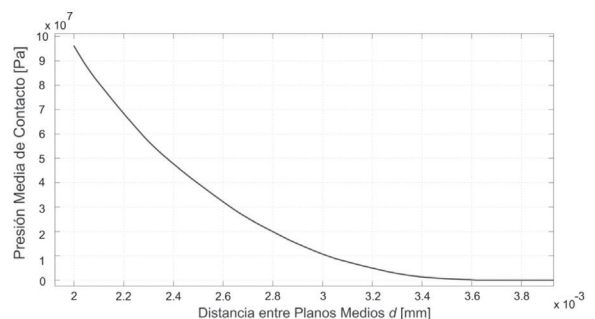


Figura 5. Relación entre presión media y distancia entre los planos medios d.

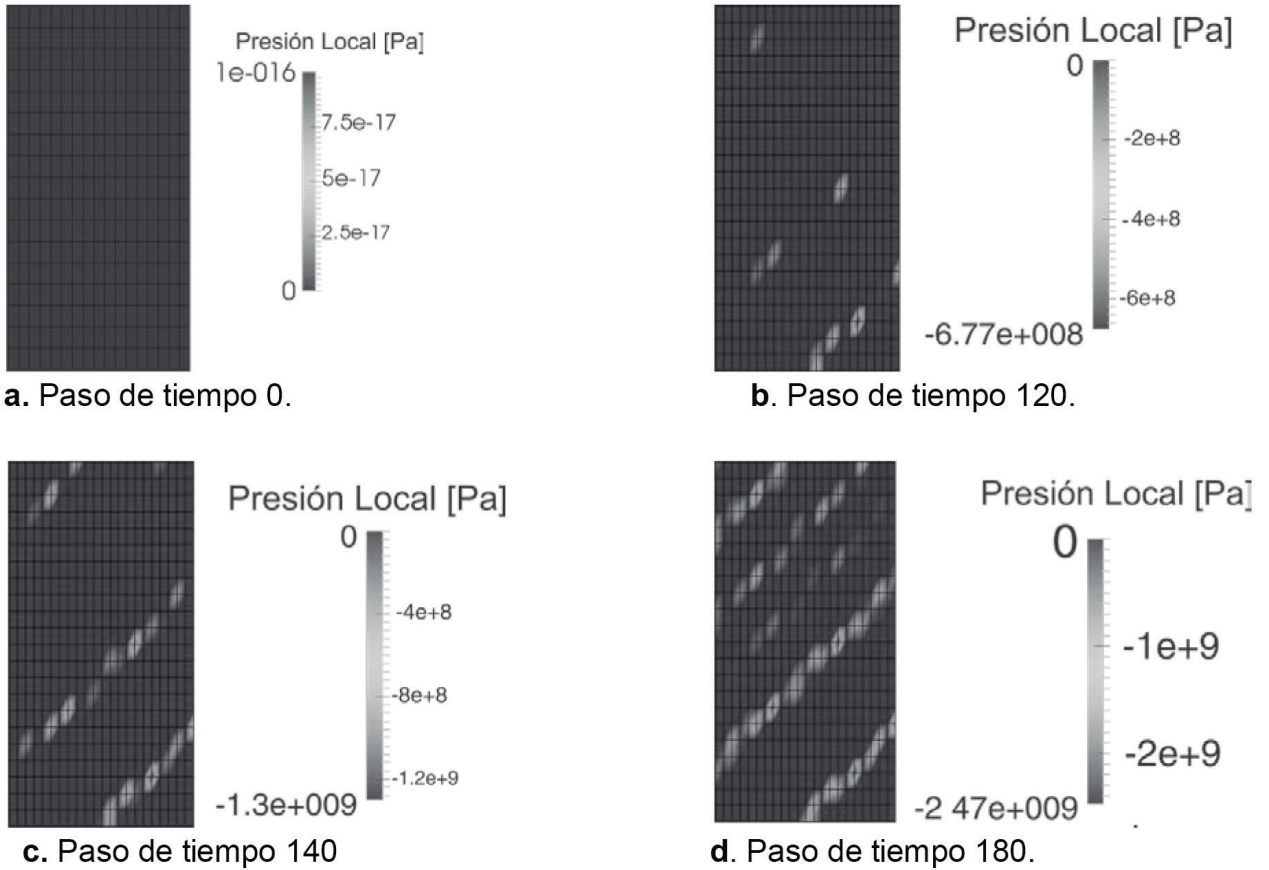


Figura 6. Presiones de contacto para distintos pasos de tiempo. a- No existe contacto, b-Instante inicial donde comienza el contacto, c- Aumenta la zona de contacto. d- Último paso, las presiones de contacto se encuentran cerca de la fluencia del material.

Las Figuras 6-a-b-c-d muestran las presiones localizadas de contacto para distintos pasos de tiempo. Se puede observar como a medida que los cuerpos se acercan y empieza a producirse el contacto, las zonas donde ambos cuerpos se tocan es cada vez mayor. Las presiones localizadas en dichos lugares son superiores a la presión media, como es de esperar.

Luego, para establecer una ley cerrada que vincule la presión de contacto con la distancia entre los planos medios de las superficies rugosas de los cuerpos, se ha realizado una interpolación a la curva de la Figura 5. El resultado de la interpolación se muestra en la figura 7, y la ecuación del polinomio interpolante es,

$$p_N = (4,3948364e13)d^2 - (3,02514e11)d + 5,2188418e8 \tag{14}$$

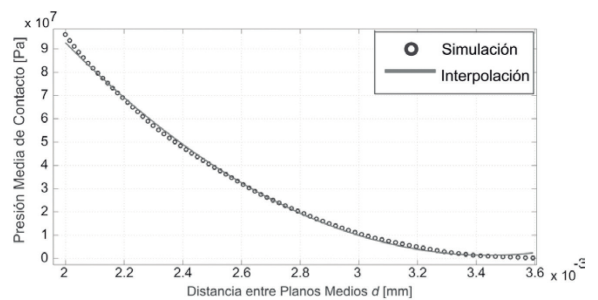


Figura 7. Resultados de la simulación numérica e interpolación cuadrática.

DISCUSIÓN

El comportamiento de la curva que se muestra en la Figura 7 es comparable con los resultados analíticos y numéricos obtenidos por (Bandeira et al. 2003).

Es importante mencionar que cuando la distancia d se aproxima a cero, el valor numérico de la presión de contacto se incrementa asintóticamente hasta el infinito. Esto ocurre porque el área de contacto es muy pequeña y localizada. Por lo tanto, es necesario verificar que los valores de la presión de contacto no superen los de fluencia del material.

El conocimiento de alguna ley del tipo $p_N = p_N(d)$, como la que se describe en este trabajo, permitiría incluir la ley $p_N = p_N(d)$ en un análisis de algún componente mecánico evitando la generación de una malla extremadamente refinada para que represente correctamente la rugosidad en cada superficie de contacto. Por lo tanto, las ventajas tecnológicas de conocer la ley $p_N = p_N(d)$ se vuelve evidente: el tiempo de modelado y procesamiento de datos se vería notablemente disminuido, y esto sumado a la ayuda que presentaría esta metodología en la etapa de diseño, ya que se podría evaluar el comportamiento de los

componentes con distintas rugosidades, sin recurrir a ensayos experimentales.

CONCLUSIONES

La importancia de encontrar leyes que modelen la dependencia entre la rugosidad de las superficies y las presiones medias de contacto, radica en mejorar y optimizar el diseño de un determinado componente mecánico evitando la realización de numerosos ensayos experimentales demandantes en tiempo y costos.

Se pretende que, a partir de los resultados obtenidos en este trabajo, sea posible ampliar la línea de investigación con el fin de conocer mejor la influencia en las presiones de contacto cuando se incluyan efectos de plasticidad, coeficientes de fricción y se simulen procesos de desgaste.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se realizó gracias al apoyo de la Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Santa Fe (UTN-FRSF) y del Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC).

REFERENCIAS

- Gamez-Montero P, Zárate F, Sánchez M, Castilla R, Codina E. (2005). El problema del contacto en bombas de engranajes de perfil troncooidal. *Revista Internacional de Métodos numéricos para el Cálculo y Diseño de Ingeniería*; 21, 213-229.
- Bathe K. (2004). On the state of finite element procedures for forming processes. *Proceedings of the NUMIFOR'04, material processing and design: modeling, simulation and applications. Gosh Sea, American Institute of Physics: Melville*; 34.
- Madge J, Leen S, McColl I, Shipway P. (2007). Contact-evolution based prediction of fretting fatigue life: Effect of slip amplitude. *Wear*, 262, 1159-1170.
- Archard, J.F. (1953). Contact and rubbing flat surfaces. *Journal of Applied Physics*. 24, 981-988.
- Greenwood, A. and Williamson, J.B.P. (1966). The contact of normally-flat surfaces. *Proceedings of Royal Society of London*, 295-A, 300-379.
- Zavarise, G; Wriggers, P; Stein, E.; Schrefler, B.A. (1992). A numerical model for thermomechanical contact based on microscopic interface laws. *Mechanics Research Communications*. 19:173-182.
- Kragelsky, M., Dobychin, M., and Kambalov, V. (1982). *Calculation Methods (Translated from the Russian by N. Standem)*. Pergamnon Press.
- McCool, J. I. (1986). Comparison of models for the contact of rough surfaces. *Wear* 107, 1, 37-60.
- Majumdar, A., and Bhushan, B. (1990). Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces. *ASME Journal of Tribology*. 112, 2, 205-216.
- Hill, R. (1965) A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 12, 213-22
- Parisch, H. (1989). A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional nonlinear contact analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 28, 1803-1812.
- Cavaliere, F. J., Cardona, A. (2012) A mortar contact algorithm for three-dimensional elasticity problems. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. 28, 2, 80-92.
- Sfantos G, Aliabadi M. A boundary element formulation for three-dimensional sliding wear simulation. *Wear* 2007;
- Johnson K. (1987). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 262:672-683.
- MATLAB (MATrixLABoratory) <http://www.mathworks.com/products/matlab/> (2012).
- Cavaliere, F.J. Fachinotti, V. y Cardona, A. (2012). An augmented Lagrangian technique combined with a mortar algorithm for modelling mechanical contacts problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 93, 4, 420-442.
- Rodríguez Montes, J., Martínez Castro, L., Real Romero del, J. C. (2006). *Procesos Industriales para Materiales Metálicos*. Visión Libros.
- Cardona, A., Igor, K., Geradin, M. (1994). Design of a new finite element programming environment. *Engineering Computations* 11, 365-381.
- Mott, R. L. (2006). *Diseño de Elementos de Máquinas*. Pearson Educación.
- Bandeira, A. A.; Wriggers, P. and Pimenta, P. (2004). Numerical derivation of contact mechanics interface laws using a finite element approach for large 3D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 59, 173-195.