Un Criterio Suficiente de Estabilidad en Plasmas Magnetizados Axisimétricos Cuasi-estáticos

Resumen: *En este artículo desarrollamos una condición suficiente de estabilidad, aplicable a plasmas cuasi-estáticos, idealmente conductores, sin viscosidad, congelados a campos magnéticos generales. Desarrollamos el criterio en coordenadas esféricas utilizando un principio de energía hidromagnético, y buscamos las regiones que pueden permanecer en equilibrio en cada configuración magnética particular y frente al desarrollo de perturbaciones lineales bidimensionales. Las configuraciones magnéticas estudiadas son las que autoconsistentemente pueden sustentar un flujo en el caso dinámico. El análisis que realizamos es local, es decir, hallando los autovalores de una matriz autoadjunta que relaciona las componentes de la perturbación con el campo magnético externo podemos determinar las regiones en las cuales una perturbación puede desarrollarse, y por esta razón el criterio permite decidir si una dada región es inestable pero no si esa región es estable frente a esa perturbación.*

Palabras Claves: *plasmas – hidromagnético - perturbación - estabilidad*

Abstract: *In this paper we develope a sufficient condition of stability, applicable to quasi- static, ideally conductive, inviscid plasmas, frozen to general magnetic fields. We develop the criterion in spherical coordinates using a principle of hydromagnetic energy, and we look for the regions that can remain in equilibrium in each particular magnetic configuration and against the development of the proposed perturbations. The magnetic configurations studied are those that can consistently support a flow in the dynamic case. The analysis we perform is local, that is, by finding the eigenvalues of a self adjoint matrix that relates the components of the perturbation with the external magnetic field, we can determine the regions in which a perturbation can be developed, and for this reason the criterion allows to decide if a given region is unstable but not if that region it is stable.*

Keywords: *plasmas - hydromagnetic - perturbation - stabilit*

Néstor O. Rotstein

Estudios medioambientales mediante sensado y detección remotos. Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Buenos Aires.

Medrano 951 (CP1179) - Buenos Aires - Argentina.

Mail: nrotstein@cedi.frba.utn.edu.ar

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de plasmas confinados magnéticamente han sido ampliamente estudiados en diferentes escalas, desde las que se asocian a sistemas cosmológicos hasta las que corresponden a máquinas de fusión. Uno de los tópicos centrales en estos estudios es el equilibrio magnetostático conjunto del plasma y del campo magnético en presencia de un campo gravitatorio externo, porque resulta fundamental establecer las propiedades de estabilidad de los diferentes modelos de estructura magnética que autoconsistentemente sirven de soporte al plasma confinado. Por ejemplo, Dubois y Teyssier (2010), Porth y Komissarov (2015) estudian fenómenos asociados a la estabilidad de jets cósmicos extragalácticos, Asseo y colegas (1980) estudian los estados de equilibrio del gas interestelar subsumido en el campo gravitatorio galáctico en presencia de rayos cósmicos, Low y Manchester (2000) analizan el equilibrio magnetostático en atmósferas estelares isotérmicas, Aly (2012) realiza un interesante análisis del equilibrio y la estabilidad en prominencias solares quiescentes, Ham y colaboradores (2015) estudian peculiares estados de equilibrio asociados a la falta de simetría axial en tokamaks. Una revisión completa y estimulante de todos estos tópicos puede encontrarse en Balbus y Potter (2016) en el que se abarcan temas relacionados con las inestabilidades en objetos astrofísicos, o en Keppens y Demaerel (2016), Demaerel y Keppens (2016), que analizan diferentes equilibrios MHD en tokamaks.

En términos absolutamente generales las condiciones de estabilidad de los flujos de plasma magnetizados se obtienen explotando la estructura hamiltoniana de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica clásica perturbadas (véase el pionero trabajo de Newcomb, 1962) y, en particular, utilizando tres tipos de principios energéticos (Andreussi et al, 2015). No obstante, Glasser y colegas (2016) analizan la estabilidad magnetohidrodinámica resistiva lineal de un plasma toroidal axisimétrico basándose en un método de expansiones asintóticas combinadas, en tanto que Tonci et al (2014) investigan modelos híbridos cinético-magnetohidrodinámico en los que un plasma caliente (gobernado por una teoría cinética) interactúa con una masa fluida magnetizada (gobernada por las ecuaciones MHD) y emplean en su estudio diferentes esquemas de acoplamiento no lineal, incluyendo el esquema de acoplamiento de presión (PCS) utilizado en simulaciones híbridas modernas, que tiene la desventaja de no ser hamiltoniano y, en consecuencia, no permite invocar un principio de conservación de la energía total del sistema.

Nuestro interés está centrado en la estabilidad de diferentes configuraciones magnéticas, en geometría cilíndrica y esférica. De hecho, en Rotstein y Ferro Fontán (1995) hemos introducido una novedosa clase de configuraciones magnéticas plausibles en objetos autogravitantes, y en Rotstein (2011) y Rotstein y Ferro Fontán (2012) hemos extendido ese tipo de configuraciones magnéticas pensando en plasmas resistivos. El objetivo de este trabajo es analizar bajo qué condiciones estas configuraciones podrían permanecer en equilibrio estático, porque es central comprender de qué manera podría iniciarse un flujo. A lo largo de este artículo emplearemos el principio de energía introducido por Bernstein y colegas (1958), en el cual todos los elementos de fluido son desplazados de sus posiciones de equilibrio estático por alguna perturbación (lineal, armónicamente dependiente del tiempo y sujeta a determinadas condiciones de contorno) y escribiremos las ecuaciones para las variables perturbadas. Esto lo haremos en la sección 2, donde además escribiremos la integral de energía y analizaremos bajo qué condiciones, al menos localmente, el sistema puede ser estable. Este carácter local se debe al hecho de que dentro de nuestro marco de análisis la integral de energía debe ser definida negativa para que el sistema sea estable. Pero esto se logra analizando los autovalores de una matriz de 4×4 asociada a las formas cuadráticas en la perturbación y el campo magnético. Y para simplificar el tratamiento se deja de lado uno de los términos que siempre es negativo, de suerte tal que si en alguna región las condiciones halladas fueran de inestabilidad todavía faltaría incluir el término estabilizador. En cambio, si la integral reducida se relacionara a una perturbación inestable, toda la región lo será. Por este motivo es que podemos decidir si una región es inestable (frente a la particular perturbación) pero no podemos afirmar taxativamente que sea estable. Y de ahí el carácter sólo suficiente del criterio. En la sección de aplicaciones analizaremos algunos casos particulares de interés, y dejaremos la sección final para el análisis de los resultados y las conclusiones que de ellos se desprenden.

EL CRITERIO DE ESTABILIDAD

Habremos de concentrarnos en las interacciones de un fluido compresible, sin viscosidad, con diferentes estructuras magnéticas y el campo magnético esféricamente simétrico generado por un objeto central. En la aproximación magnetohidrodinámica (MHD) las ecuaciones que describen estas interacciones se escriben como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{2}$$

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right]\vec{v} = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B} \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right](P\rho^{-\gamma}) = 0 \tag{4}$$

donde v es la velocidad del fluido, p su densidad, P la presión del plasma, B el campo magnético externo, y g la aceleración gravitatoria (también externa al fluido).

La ecuación (2) indica que consideramos nulo el campo total *(E+v ×B=0)*, en tanto que la expresión (4) indica que estamos suponiendo que el fluido evoluciona adiabáticamente, esto es, que no existe transporte de calor por conducción ni a través ni a lo largo de las líneas de campo. Habremos de trabajar en geometría esférica suponiendo ignorable la coordenada de rotación alrededor del eje polar (simetría axial) y nula la componente toroidal del campo magnético, esto es, adoptaremos algunos casos particulares de interés, y dejaremos la sección final para el análisis de los resultados y las conclusiones que de ellos se desprenden.

$$\rho = \rho(r,\theta) \qquad P = P(r,\theta) \qquad \vec{B} = B_r\hat{e}_r + B_\theta\hat{e}_\theta$$

Ahora bien, en equilibrio magnetohidrostático las ecuaciones (1)-(4) se reducen a la forma

$$-\nabla\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{B}}{\mu_0} - \rho\ g\ \hat{e}_r = 0 \tag{5}$$

donde hemos usado la identidad

$$\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\ \vec{B} = -\nabla B^2/2 + \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{B}.$$

Supongamos ahora que el sistema es desplazado de su posición de equilibrio, y sea

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(r,\theta)e^{i\omega t} \tag{6}$$

el vector desplazamiento. Las expresiones de las variables perturbadas a primer orden (que indicaremos simplemente con un moño cuando se trate de un escalar, y un moño y en negrita cuando se trate de un vector perturbado) a partir de la ecuación de continuidad (1), de inducción (2) y de flujo adiabático (4) serán en consecuencia

$$\tilde{\rho} = -\nabla \cdot \left(\rho \vec{\xi}\right) \tag{7}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \left(\vec{\xi} \times \vec{B}\right) = \left(\vec{B} \cdot \nabla\right) \vec{\xi} - \left(\vec{\xi} \cdot \nabla\right)\vec{B} - \\ - \vec{B}\left(\nabla \cdot \vec{\xi}\right) \tag{8}$$

$$\tilde{P} = -\left(\vec{\xi} \cdot \nabla\right)P - \gamma P\left(\nabla \cdot \vec{\xi}\right) \tag{9}$$

Finalmente, de la expresión (3) resulta la ecuación de movimiento linealizada a primer orden, para una perturbación del tipo de la expresión (6) (Bernstein et al, 1958)

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\omega^2 \rho \vec{\xi} = -\nabla\left(\tilde{P} + \frac{\vec{B} \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}}}{2\mu_0}\right) + \\ + \frac{\left(\vec{B} \cdot \nabla\right) \widetilde{\boldsymbol{B}} + \left(\widetilde{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\right) \cdot \vec{B}}{\mu_0} - \tilde{\rho}\, g\, \hat{e}_r \equiv \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\xi) \tag{10}$$

Una vez establecidas las condiciones de contorno sobre la perturbación ξ es posible, en principio, encontrar los valores de w^2, y del principio de conservación de la energía se sigue que si $w^2>0$ el sistema oscila alrededor de su posición de equilibrio, en tanto que para $w^2<0$ el sistema se aparta irreversiblemente de éste (Bernstein et al, 1958). Ahora bien, en la expresión anterior hemos introducido la cantidad $\tilde{F}(\xi)$, que representa la fuerza linealizada por unidad de volumen que aparece debido al desplazamiento. Obsérvese que la integral volumétrica de esta fuerza, multiplicada escalarmente por el desplazamiento, representa el trabajo durante la perturbación, y es necesariamente contraria y proporcional al cambio de energía potencial W debido a ese desplazamiento, es decir, se cumple

$$-\int \omega^2 \rho\, \vec{\xi} \cdot \vec{\xi}\, dV = \int \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(\xi) \cdot \vec{\xi}\, dV \equiv -2\delta W \tag{11}$$

y el factor 2 que aparece en el miembro derecho obedece a que $\tilde{F}(\xi)$ es un operador autoadjunto (véase Bernstein et al, 1958) y la integral de volumen es entonces dos veces la variación de energía potencial (en términos poco rigurosos puede pensarse que la fuerza media durante el desplazamiento completo es la mitad de $\tilde{F}(\xi)$). Pero debemos tener en cuenta que $w^2\int(\rho\ \xi^2/2)dV$ representa la energía cinética del plasma (definida positiva) de manera tal que la ecuación (11) asegura que el sistema gana energía cinética si la energía potencial decrece, esto es, si $\delta W<0$. De aquí se sigue que el sistema es inestable si para alguna perturbación ξ resulta $\delta W<0$ (porque en tal caso debe ser $w^2<0$). Entonces, escribamos la expresión (11) en una forma más conveniente, a saber

$$\left(\tilde{P} + \frac{\vec{B} \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}}}{2\mu_0}\right)\Bigg\} dS + \\ + \int \left\{\nabla\vec{\xi} \left(\tilde{P} + \frac{\vec{B} \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}}}{2\mu_0}\right) + \left(\frac{\left(\widetilde{\boldsymbol{B}} \cdot \nabla\right)\vec{B}}{\mu_0}\right) \cdot \vec{\xi} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{\xi}}{\mu_0}\right) \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}} - \tilde{\rho}\, g\, \vec{\xi} \cdot \hat{e}_r \right\} dV \tag{12}$$

Obsérvese que la primera integral proviene de la divergencia del primer sumando en el término central de la expresión (10) usando el desarrollo (8). Por lo demás, la integral de volumen es autoadjunta (Zweibel, 1981), es decir, sus autovalores son reales. Si suponemos que la perturbación a que sometemos el sistema estático se anula sobre la superficie de integración, el primer sumando será nulo, esto es, si de ahora en más suponemos una perturbación de la forma

$$\vec{\xi}(r, \theta) = \xi_r(r, \theta)\hat{e}_r + \xi_\theta(r, \theta)\hat{e}_\theta \tag{13}$$

la anulación de la primera integral de la expresión (12) supone que tanto la componente radial ξ_r como la polar ξ_0 de la perturbación se anulan sobre la superficie de integración. Sustituyendo ahora las expresiones (7)-(9) en la ecuación (12), la integral de volumen resulta

$$-2\delta W=\int\left\{-(\nabla\cdot\vec{\xi})^2\left(\gamma P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+2(\nabla\cdot\vec{\xi})\right.$$
$$\left.-\left[(\vec{\xi}\cdot\nabla)\left(P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\xi}}{\mu_0}\,\vec{B}\right]\right\}dV+$$
$$+\int\left\{\vec{\xi}\cdot\frac{\left((\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\xi}\cdot\nabla\right)\vec{B}}{\mu_0}-\vec{\xi}\cdot\frac{\left((\vec{\xi}\cdot\nabla)\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{B}}{\mu_0}-\right.$$
$$\left.-\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\xi}}{\mu_0}+\xi_r g(\vec{\xi}\cdot\nabla)\,\rho\right\}dV \tag{14}$$

Completando cuadrados, tras una tediosa operación, resulta

$$-2\delta W=-\int\left(\gamma P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)\left[\nabla\cdot\vec{\xi}+\right.$$
$$\left.\left.\frac{(\vec{\xi}\cdot\nabla)\left(P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\xi}}{\mu_0}\,\vec{B}}{\gamma P+\frac{B^2}{2\mu_0}}\right]^2\right\}dV+$$
$$+\int\left[\frac{(\vec{\xi}\cdot\nabla)\left(P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\xi}}{\mu_0}\,\vec{B}}{\gamma P+\frac{B^2}{2\mu_0}}\right]^2 dV+$$
$$\int\left[\vec{\xi}\cdot\frac{\left((\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\xi}\cdot\nabla\right)\vec{B}}{\mu_0}-\vec{\xi}\cdot\frac{\left((\vec{\xi}\cdot\nabla)\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{B}}{\mu_0}-\right.$$
$$\left.-\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\xi}}{\mu_0}+\xi_r g(\vec{\xi}\cdot\nabla)\rho\right]dV \tag{15}$$

Ahora, integrando por partes el tercer sumando, reemplazando por los valores de equilibrio y reagrupando términos se obtiene finalmente

$$-2\delta W=-\int\left(\gamma P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)\left[\nabla\cdot\vec{\xi}+\right.$$
$$+\int\left[\frac{(\vec{\xi}\cdot\nabla)\left(P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\xi}}{\mu_0}\,\vec{B}}{\gamma P+\frac{B^2}{2\mu_0}}\right]^2 dV+$$
$$+\int\left\{\left[\frac{(\vec{\xi}\cdot\nabla)\left(P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\xi}}{\mu_0}\,\vec{B}}{\gamma P+\frac{B^2}{2\mu_0}}\right]^2\right.$$
$$\left.-\left[\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\xi}}{\mu_0}\right]^2\right\}dV-$$
$$-\int\left\{\xi_r^2\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\rho\frac{\partial g}{\partial r}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\xi_\theta^2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\rho g\right\}dV$$
$$+\int\xi_r\xi_\theta\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\left(P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)dV \tag{16}$$

De aquí se sigue que el sistema es inestable si para alguna perturbación ξ resulta δW<0. El primer sumando del núcleo de la ecuación (16) o bien es negativo (o sea, estabilizador) o bien es nulo. La situación más inestable posible será aquella en la que este término sea nulo, porque si de hecho no lo fuera y se hallara una perturbación que hace positivo el resto de la integral de volumen, quedaría por incluir un término estabilizador para analizar el signo completo de δW. Suponer que el primer sumando es nulo es establecer una condición limitante sobre las perturbaciones posibles, pues de hecho debe cumplirse

$$(\nabla\cdot\vec{\xi})\left(\gamma P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+(\vec{\xi}\cdot\nabla)\left(P+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)-$$
$$-\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{\xi}}{\mu_0}\,\vec{B}=0 \tag{17}$$

que, en virtud de las expresiones (7) y (8) es lo mismo que pedir

$$\tilde{P} + \frac{\vec{B}\tilde{B}}{\mu_0} = 0 \equiv \widetilde{\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)} = 0 \tag{18}$$

En consecuencia, habremos de trabajar en la hipótesis de que la forma perturbada de presión total (la del plasma más la magnética) sea nula, que a su vez se asocia a una particular condición entre los ángulos de propagación de la perturbación y el campo magnético original. Quizás valga la pena recalcar que no es que la presión total estabiliza el plasma, sino que tiende a gobernar oscilaciones estables frente a determinadas perturbaciones. Si las tres integrales restantes del núcleo de la expresión (16) tuvieran efectos desestabilizantes, nada podríamos asegurar acerca de la estabilidad (o de la inestabilidad) de la región en estudio.

Sin el primer sumando, la integral será negativa siempre que los autovalores de la matriz asociada sean todos negativos. Pero dado que el integrando posee ya un término positivo podemos analizar los tres autovalores restantes del integrando sin el primer término cuadrático no nulo. De su análisis surge que un autovalor es negativo y los otros dos se obtienen a partir de la ecuación

$$\lambda^2 + (\alpha + \beta)\,\lambda + \left(\alpha\beta - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = 0 \tag{19}$$

donde los coeficientes α, β y ε son los términos que multiplican a ξ^2_r, ξ^2_θ y $\xi_r\xi_\theta$, respectivamente, en la ecuación (16). Ahora bien, pedir que los autovalores sean negativos es equivalente a pedir que las raíces de la ecuación a $\lambda^2+b\lambda+c=0$ sean ambas negativas. Para ello deben ser c > 0 y b > 0 (pues en nuestro caso es a=1) que, traducido a la forma (19) se escribe como

$$\alpha + \beta > 0 \tag{20}$$

$$\varepsilon^2 - 4\alpha\beta < 0 \tag{21}$$

A su vez, dado que $\varepsilon^2-4\alpha\beta<0$ si y sólo si α y β son simultáneamente positivos o negativos, podemos reescribir la condición (20) como

$$\alpha > 0 \qquad \beta > 0 \tag{22}$$

es decir, el integrando puede ser negativo (estabilizador) sólo si se cumplen las condiciones

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,\mathcal{P} + \rho\,\frac{\partial g}{\partial r} \geq 0 \tag{23}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\mathcal{P} + \rho g \;\geq 0 \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\mathcal{P}\right] - \frac{4}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,\mathcal{P} + \rho\,\frac{\partial g}{\partial r}\right]^2 \times \\ &\times \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\right)[\mathcal{P} + \rho g] \geq 0\end{aligned} \tag{25}$$

donde hemos definido la presión total

$$\mathcal{P} = \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) \tag{26}$$

Si alguna de estas condiciones no se satisficiera, el sistema sería inestable localmente, porque en principio no es posible esperar que las condiciones (23)-(25) se cumplan a lo largo de todo el sistema. Debe notarse, sin embargo, que si en alguna región estas condiciones se verificaran el sistema podría todavía ser inestable debido a la presencia del segundo término de la ecuación (16).

TRATAMIENTO GENERAL

Notemos ante todo que la condición de equilibrio magnetostático (5) se reduce a las dos ecuaciones

$$-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{\mu_0}\,(\vec{J}\times\vec{B})_r-\rho g=0 \tag{27}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{\mu_0}\,(\vec{J}\times\vec{B})_\theta=0 \tag{28}$$

que, una vez definido el campo magnético, permiten en principio hallar las expresiones de equilibrio de la presión del plasma y de su densidad. Ahora bien, con simetría axial la forma general de las componentes poloidales del campo magnético se escriben en términos de una función *α(r)* y el ángulo polar como (Tsinganos, 1982)

$$B_r=2\frac{\omega}{r^2}\cos\theta \tag{29}$$

$$B_\theta=-\frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr}\,sen\,\theta \tag{30}$$

donde *w(r)* es una función en principio arbitraria que puede incluso ser definida en base a algún principio de plausibilidad. Para simplificar el tratamiento definamos la distancia adimensionalizad

$$x=\frac{r}{L} \tag{31}$$

donde L es el tamaño típico del sistema esférico de que se trate. Si definimos además

$$W=\frac{\omega}{L^2} \tag{32}$$

las componentes del campo se escriben inmediatamente como

$$B_r=2\frac{W}{x^2}\cos\theta \tag{33}$$

$$B_\theta=-\frac{1}{x}\frac{dW}{dx}\,sen\,\theta\equiv-\frac{W'}{x}\,sen\,\theta \tag{34}$$

La integración general de las formas de presión magnética, presión del plasma, presión total y densidad son inmediatas en términos de las expresiones (33) y (34). En efecto, resultan

$$\vec{J}\times\vec{B}=\frac{W'}{Lx}\left(\frac{2W}{x^3}+\frac{W'}{x^2}-\frac{W''}{x}\right)sen^2\theta\,\hat{e}_r+$$
$$+\frac{2W}{Lx^2}\left(\frac{2W}{x^3}+\frac{W'}{x^2}-\frac{W''}{x}\right)sen\theta\cos\theta\;\hat{e}_\theta \quad (\tag{35}$$

$$P(x,\theta)=\frac{W}{\mu_0 x}\left(\frac{2W}{x^3}+\frac{W'}{x^2}-\frac{W''}{x}\right)sen^2\theta+P_0(x) \quad (\tag{36}$$

$$\mathcal{P}(x,\theta)=P_0(x)+\frac{2W^2}{\mu_0 x^4}+$$
$$+\left[\frac{1}{\mu_0 x^2}\left(\frac{W'^2}{2}+\frac{WW'}{x}-WW''\right)\right]sen^2\theta \quad (\tag{37}$$

$$\rho(x,\theta)=\frac{1}{\mu_0 Lgx^2}\left\{\left(\frac{8W^2}{x^3}+\frac{WW'}{x^2}-\frac{3WW''}{x}-2WW'''\right)\right\}sen^2\theta-\frac{P_0'}{Lg} \quad (\tag{38}$$

En la ecuación (36) hemos introducido la función *P₀(x)*, constante de integración respecto de la coordenada polar que, en con secuencia, depende sólo de x.

Ahora bien, en término de las funciones

$$U_0(x)=\frac{1}{\mu_0 L^2x^2}\left[\left(4\frac{W'}{x}-16\frac{W}{x^2}\right)\left(\frac{W'}{x}-2\frac{W}{x^2}\right)+\right.$$
$$\left.+4\frac{W}{x^2}\left(2\frac{W}{x^2}-2\frac{W'}{x}+W''\right)\right]$$

$$U_1(x)=\frac{1}{\mu_0 L^2x^2}\left[\frac{W}{x^2}\left(12\frac{W'}{x}-9W''+4xW'''-x^2W''''\right)+\right. \tag{39}$$

$$+\frac{W'}{x}\left(-3\frac{W'}{x}+2W''-xW'''\right)\Bigg] \quad (40)$$

$$U_2(x)=\frac{1}{\mu_0 L x^2}\left[\left(\frac{W'^2}{x^2}+6\frac{WW'}{x^3}-\frac{2WW''}{x^2}-8\frac{W^2}{x^4}\right)\right]-\frac{P_0'}{L} \quad (41)$$

$$U_3(x)=\frac{1}{\mu_0 L x^2}\left[\left(-2\frac{W'^2}{x^2}-6\frac{WW'}{x^3}+3\frac{WW''}{x^2}+8\frac{W^2}{x^4}-3\frac{WW'''}{x}\right)\right] \quad (42)$$

$$U_4(x)=\frac{4}{\mu_0 L x^4}\left(\frac{W'^2}{2}+4\frac{WW'}{x}-4WW''+xWW'''\right) \quad (43)$$

las condiciones de estabilidad (23) – (25) se escriben como

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\mathcal{P}+\rho\frac{\partial g}{\partial r}\geq 0 \equiv \frac{P_0''}{L^2}+2\frac{P_0'}{L^2 x}+U_0+U_1\,sen^2\theta\geq 0 \quad (44)$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathcal{P}+\rho g\ \geq 0 \equiv U_2+\frac{P_0'}{L}+U_3\,sen^2\theta\geq 0 \quad (45)$$

$$\left[\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\mathcal{P}\right]^2-$$

$$-\frac{4}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\mathcal{P}+\rho\frac{\partial g}{\partial r}\right]\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathcal{P}+\rho g\right]\geq 0$$

$$\equiv\left[\frac{2}{L}\,U_4\right]^2-\frac{4}{x}\left(\frac{P_0''}{L^2}+2\frac{P_0'}{L^2 x}+U_0+U_1\,sen^2\theta\right)\times$$

$$\times\left(U_2+U_3\,sen^2\theta\right)\geq 0 \quad (46)$$

y el problema queda completo una vez que se define el perfil del campo magnético del sistema. La estructura completa del campo magnético autoconsistente con la existencia de flujos y regiones estáticas es en general sumamente complicada (véase por ejemplo Rotstein y Ferro Fontán, 1995, 2012; Rotstein, 2011, 2017) pero una aproximación suficiente para nuestros propósitos de tratamiento de la estabilidad consiste en superponer un campo de líneas abiertas y uno de líneas cerradas. Por eso en lo que sigue analizaremos el caso general de campos magnéticos generados por funciones de la forma

$$W=kx^q \quad (47)$$

donde k es una constante positiva. Un tal campo en coordenadas esféricas puede ser expresado en términos de un parámetro de curvatura q mediante una función de la forma

$$\vec{B}=2kx^{q-2}\cos\theta\,\hat{e}_r-qk\,x^{q-2}sen\,\theta\ \hat{e}_\theta \quad (48)$$

Es casi evidente que para evitar que el campo magnético diverja o sea constante, debe ser $q<2$, pero más aún, la expresión (38) para la densidad adelanta que dado que la aceleración gravitatoria va como x^{-2}, el parámetro q debe ser estrictamente menor que 1,5. Debe notarse, además, que este campo cambia su condición de abierto a cerrado en $q=0$, que corresponde a un campo magnético puramente radial.

Teniendo en cuenta las expresiones (39) – (43) podemos analizar el rol del parámetro de curvatura q en la estabilidad de la configuración observando que las condiciones de estabilidad (44) y (45) se transforman en

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\mathcal{P}+\rho\frac{\partial g}{\partial r}\geq 0\equiv P_0''+2\frac{P_0'}{x}+ + \frac{k^2x^{2q-6}}{\mu_0}[(8q^2-36q+40)+ (-2q^4+15q^3-33q^2+29q)sen^2\theta]\geq 0 \quad (49)$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathcal{P}+\rho g\ \geq 0 \equiv \frac{k^2x^{2q-6}}{\mu_0 L^2}[(-q^2+8q-8)+ +(-3q^3+10q^2-15q+8)sen^2]\geq 0 \quad (50)$$

Analicemos la función (50). Lo primero que debemos tener en cuenta es que la función U3 cambia de signo y se hace negativa en q=1. Por otro lado, el cociente tiene límite 1 en *q=0*, de manera tal que no existe valor alguno del parámetro de curvatura en el intervalo *q∈[0; 1]* que haga posible la estabilidad. Finalmente, debe notarse que la función *U2* cambia de signo (y se hace negativa) recién en *q≈1,17*, de manera tal que la condición (50) se traduce en las formas

$$sen\theta\geq\sqrt{\frac{(q^2-8q+8)}{(-3q^3+10q^2-15q+8)}} \quad si\ -2\leq q<0 \quad (51.a)$$

$$sen\theta\leq\sqrt{\frac{(q^2-8q+8)}{(-3q^3+10q^2-15q+8)}} \quad si\ 1{,}17<q<1{,}5 \quad (51.b)$$

En la figura 1 mostramos el cociente para el rango de valores -2≤*q*<1,5, donde puede verse que no todo valor del parámetro de curvatura es capaz de cumplir la condición de estabilidad. En la figura 2 ampliamos el intervalo [0; 1,5] en el que parece evidente que en el intervalo [0; 1,17] no existe valor alguno del parámetro que haga posible la validez de la condición, esto es, que el sistema es inestable frente a perturbaciones polares. En la figura 3 mostramos los valores límites del ángulo polar en función del parámetro de curvatura. Obsérvese que la condición (49) puede ahora expresarse en la forma

$$P_0''+2\frac{P_0'}{x}\geq-\frac{k^2x^{2q-6}}{\mu_0}[2(4q^2-18q+20)+ +(-2q^4+15q^3-33q^2+29q)\ sen^2\theta] \quad (52)$$

que en términos de la ecuación (51), para *q*≤0 puede escribirse como

$$P_0''+2\frac{P_0'}{x}\geq\frac{k^2}{\mu_0}\alpha\,(q)x^{2q-6} \quad (53)$$

donde hemos definido

$$\alpha\,(q)=\ (-8q^2+36q-40)+ \frac{(2q^4-15q^3+33q^2-29q)\ (q^2-8q+8)}{(-3q^3+10q^2-15q+8)} \quad (54)$$

Si bien a partir de las ecuaciones (4), (27), (35) y (38) podría obtenerse en principio una forma de la presión P_0 (a condición de definir el índice politrópico *y*) sabemos de algunas restricciones que debe cumplir, a saber

i) P_0 es, necesariamente, definida positiva. Si no lo fuera, la presión en los polos podría ser negativa o nula, situación físicamente inaceptable; ii) dP_0/dx es, necesariamente, definida negativa. Si no lo fuera, la densidad en los polos podría ser negativa o nula, situación físicamente inaceptable; iii) P_0 no puede ser constante, pues debe anularse en el infinito.

Con estas restricciones en mente, parece evidente que la desigualdad (52) se cumple para

$$P_0(x)=\ \frac{\Pi_0}{x^n}+\frac{k^2}{\mu_0}\frac{\alpha\,(q)}{(2q-3)(2q-4)}x^{2q-4} \quad (55)$$

donde Π_0 es una constante positiva relacionada con la presión en la superficie del sistema y compatible con las condiciones de contorno, y *n* un coeficiente a determinar (debe notarse que con *n*=1 le expresión (52) se verifica idénticamente). Obsérvese que definida negativa. Si no lo fuera, la densidad en los polos podría ser negativa o nula, situación físicamente inaceptable; iii) P_0 no puede ser constante, pues debe anularse en el infinito.

$$\rho(x,\theta) =$$

$$= \frac{k^2 x^{2q-3}}{\mu_0 L g_0}\left[\frac{\alpha(q)}{2q-3} - (2q^3 - 3q^2 - 8)sen^2\theta\right]$$

$$+n\frac{\Pi_0}{L g_0 x^{n-1}} \tag{56}$$

donde hemos definido $g=g(x=1)/x^2 \equiv g_0/x^2$. El problema queda así básicamente determinado. En el siguiente capítulo analizaremos un par de casos interesantes.

TRATAMIENTO GENERAL

Campo dipolar

Este tipo de configuración de líneas totalmente cerradas es interesante por su concepción (típicamente se trata de campos magnéticos planetarios, antes de ser deformados por los eventuales vientos estelares) y por su sencillez. De hecho, resulta de tomar *k=b>0 y q=-1* en la ecuación (47) y escribir el campo magnético como

$$\vec{B} = \frac{2b}{x^3}\cos\theta\ \hat{e}_r + \frac{b}{x^3}\ sen\,\theta\ \ \hat{e}_\theta \tag{57}$$

En tal caso las primeras dos condiciones de estabilidad se reducen, respectivamente, a las desigualdades

$$P_0'' + 2\frac{P_0'}{x} \gtrsim\ -47\frac{b^2}{\mu_0 x^8} \tag{58}$$

$$-17 + 36\ sen^2\theta \geq 0 \tag{59}$$

De acuerdo a la discusión del parágrafo anterior (y la figura 3) la desigualdad (59) se refiere a la existencia de un ángulo límite (del orden de 46°) por debajo del cual el sistema es inestable frente a desplazamientos polares o, dicho de otra manera, las regiones ecuatoriales de un plasma confinado por un campo magnético dipolar son estables frente a perturbaciones polares.

Por otro lado, la desigualdad (58) indica que la estabilidad marginal del sistema frente a perturbaciones radiales se verifica si

$$P_0'' + 2\frac{P_0'}{x} \gtrsim\ -47\frac{b^2}{\mu_0 x^8}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow P_0 = \frac{\Pi_0}{x^n} - 1{,}6\frac{b^2}{\mu_0 x^6} \tag{60}$$

imponiendo las condiciones $1 \leq n < 6$ y $\Pi_0 > b^2/u_0$ (nuevamente, obsérvese que con *n*=1 la expresión (58) se verifica idénticamente). Obsérvese que con esta expresión de P_0, la densidad resulta ser

$$\rho(x,\theta) = \frac{n\Pi_0}{L g_0 x^{n-1}} +$$

$$+\frac{b^2}{\mu_0 L g_0 x^5}[9 + 13\ sen^2\theta] \tag{61}$$

Por último, a partir de las expresiones (36) y (60) la presión resulta ser

$$P(x,\theta) = \frac{\Pi_0}{x^n} - \frac{b^2}{\mu_0 x^6}[1{,}6 + sen^2\theta] \tag{62}$$

y esta marcha de presión es coherente con la existencia de un sistema en equilibrio estático toda vez que el gradiente de presión se compensa en todo elemento de volumen con el peso del sistema.

Superposición de un campo de líneas cerradas y un campo de líneas abiertas

Este tipo de configuración en muchos casos representa adecuadamente el campo magnético en sistemas con flujo, y aunque nosotros analizamos aquí las posibilidades de equilibrio estático, vale la pena estudiar el equilibrio de una tal configuración. Si tomamos el caso de un campo abierto radial, basta pensar en la función *w(r)* como

$$\omega(x) = L^2\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{x}\right) \tag{63}$$

donde a y b son dos constantes positivas (cuyas unidades MKSC son T), y a partir de las ecuaciones (32) – (34) escribir el campo magnético como

$$\vec{B} = \left(\frac{2b}{x^3} + \frac{a}{x^2}\right)\cos\theta\ \hat{e}_r + \frac{b}{x^3}\ sen\ \theta\ \ \hat{e}_\theta \tag{64}$$

Si definimos ahora el coeficiente (adimensional) de forma de los campos

$$\kappa = \frac{b}{a} \tag{65}$$

el campo magnético puede escribirse de manera sucinta como

$$\vec{B} = \frac{a}{x^2}\left[\left(\frac{2\kappa}{x} + 1\right)\cos\theta\ \hat{e}_r + \frac{\kappa}{x}\ sen\ \theta\ \ \hat{e}_\theta\ \right] \tag{66}$$

La presión y densidad definidas en las ecuaciones (36) y (38) se escriben ahora como

$$P(x,\theta) = \frac{a^2}{2\mu_0 x^4}\left(1 - 4\frac{\kappa^2}{x^2}\right) sen^2\theta + \\ + P_0(x) \tag{67}$$

$$\rho(x,\theta) = \frac{a^2}{\mu_0 L g x^5}\left(13\frac{\kappa^2}{x^2} + \frac{21}{8}\frac{\kappa}{x} + 2\right) sen^2\,\theta - \\ - \frac{P'_0}{Lg} \tag{68}$$

y las condiciones de estabilidad se transforman en

$$\frac{1}{L^2}\frac{d^2P_0}{dx^2} + \frac{2}{L^2x}\frac{dP_0}{dx} + \\ + z_0(x) + z_1(x)\ sen^2\theta \geq 0 \tag{69}$$

$$z_2(x) + z_3(x)\ sen^2\theta \geq 0 \tag{70}$$

$$\left[\frac{2z_4(x)}{Lx}\right]^2 - \frac{4}{Lx}\left(\frac{P_0''}{L^2} + 2\frac{P_0'}{L^2x} + z_0 + z_1\ sen^2\theta\right)\times \\ \times (z_2 + z_3\ sen^2\theta) \geq 0 \tag{71}$$

donde a partir de las expresiones (39) – (43) hemos definido las cantidades

$$z_0(x) = \frac{2a^2}{\mu_0 L^2 x^6}\left(42\frac{\kappa^2}{x^2} + 30\frac{\kappa}{x} + 5\right) \tag{72}$$

$$z_1(x) = -\frac{a^2}{\mu_0 L^2 x^6}\left(91\frac{\kappa^2}{x^2} + 39\ \frac{\kappa}{x}\right) \tag{73}$$

$$z_2(x) = -\frac{a^2}{\mu_0 L x^6}\left(17\frac{\kappa^2}{x^2} + 13\frac{\kappa}{x} + 2\right) \tag{74}$$

$$z_3(r) = \frac{a^2}{\mu_0 L x^6}\left(36\frac{\kappa^2}{x^2} + 23\frac{\kappa}{x} + 2\right) \tag{75}$$

$$z_4(r) = -\frac{4a^2}{\mu_0 L x^6}\left(\frac{11}{2}\frac{\kappa^2}{x^2} + 3\frac{\kappa}{x}\right) \quad (76)$$

Dado que estamos en las condiciones de la ecuación (51.a), para que se verifique la desigualdad (70) debe cumplirse

$$|sen\,\theta| \geq \sqrt{\frac{17\kappa^2 + 13\,\kappa x + 2\,x^2}{36\kappa^2 + 23\,\kappa x + 2\,x^2}} \quad (77)$$

De nuevo, dada la dependencia radial de las funciones del lado derecho, existe un valor crítico del ángulo polar, función del parámetro *k*, más allá del cual cambia la condición de estabilidad. En la figura 4 mostramos las curvas del ángulo crítico para diferentes valores del coeficiente de forma. Debe notarse que muy lejos del sistema todas las curvas tienden a Θ=π/2, pero la región de estabilidad se engrosa con el incremento del parámetro *k*, esto es, para configuraciones en las que la componente dipolar es predominante. Esto es de esperar toda vez que en el límite el comportamiento debe ser similar al de un campo dipolar puro.

Analicemos ahora la expresión (69). En términos de las ecuaciones (72) y (73) podemos escribir

$$\frac{d^2P_0}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dP_0}{dx} \geq \frac{2a^2}{\mu_0\,x^6}\left[\left(\frac{91}{2}\frac{\kappa^2}{x^2} + \frac{39}{2}\frac{\kappa}{x}\right) sen^2\theta - \left(42\frac{\kappa^2}{x^2} + 30\frac{\kappa}{x} + 5\right)\right] \quad (78)$$

o, dado que estamos en la situación de la condición (51.a)

$$\frac{d^2P_0}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dP_0}{dx} \geq \frac{2a^2}{\mu_0\,x^6}\left[\left(\frac{91}{2}\frac{\kappa^2}{x^2} + \frac{39}{2}\frac{\kappa}{x}\right) \times \times \frac{17\kappa^2 + 13\,\kappa x + 2\,x^2}{36\kappa^2 + 23\,\kappa x + 2\,x^2} - -\left(42\frac{\kappa^2}{x^2} + 30\frac{\kappa}{x} + 5\right)\right] \quad (79)$$

La expresión entre corchetes del miembro derecho es una complicada forma que depende simultáneamente del valor del parámetro de forma y de la distancia al objeto central. Sin embargo es posible aproximarla por una curva de la forma

$$K(\kappa, x) = -\frac{f(\kappa)}{x^{g(\kappa)}} - 5 \quad (80)$$

donde hemos definido las funciones

$$f(\kappa) = \left(\frac{91}{2}\kappa^2 + \frac{39}{2}\kappa\right)\frac{17\kappa^2 + 13\,\kappa\, + 2}{36\kappa^2 + 23\,\kappa\, + 2} - -(42\kappa^2 + 30\kappa + 5) \quad (81)$$

$$g(\kappa) = 0{,}0037\,\kappa^3 - 0{,}058\,\kappa^2 + 0{,}284\,\kappa + 1{,}17 \quad (82)$$

De esta forma, una condición suficiente para que se cumpla la condición (78) es que la parte esférica de la presión sea de la forma

$$P_0(x) = \frac{\Pi_0}{x^n} - \frac{2a^2}{\mu_0 x^4}\left[\frac{f(\kappa) + 5x^{g(\kappa)}}{[g(\kappa) + 4]^2}\right] \quad (83)$$

donde, como antes, *n*>1 y Π0 es una constante positiva relacionada con la presión en la superficie del sistema y compatible con las condiciones de contorno. Luego, las formas finales de presión y densidad en equilibrio son

$$P(x,\theta) = \frac{a^2}{2\mu_0 x^4}\left(1 - \frac{\kappa^2}{x^2}\right) sen^2\theta + \frac{\Pi_0}{x^n} - -\frac{2a^2}{\mu_0 x^4}\left[\frac{f(\kappa) + 5x^{g(\kappa)}}{[g(\kappa) + 4]^2}\right] \quad (84)$$

$$\rho(x,\theta) = \frac{a^2}{\mu_0 L g x^5}\left[2 + \frac{21}{2}\frac{\kappa}{x} + 13\frac{\kappa^2}{x^2}\right] sen^2\theta + + \frac{n}{Lg}\frac{\Pi_0}{x^{n+1}} - \frac{d}{dx}\left\{\frac{2a^2}{\mu_0 x^4}\left[\frac{f(\kappa) + 5x^{g(\kappa)}}{[g(\kappa) + 4]^2}\right]\right\} \quad (85)$$

Téngase en cuenta que g(k) es del orden de 1.2 para k=0.1 y 1.9 para k=10, de modo tal que la presión es una función positiva, monótona y rápidamente decreciente. También puede verse de la expresión (85) que, a cualquier distancia, la densidad es máxima en las regiones ecuatoriales.

ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

En este trabajo hemos desarrollado un método formal y completo de análisis de la estabilidad de plasmas confinados magnéticamente por estructuras de líneas abiertas y/o cerradas. Hemos supuesto $E+v\times B$=0, pero eso no significa que necesariamente hablemos de conductividad idealmente infinita, porque en tal caso sería $E=j\ \sigma=0$. Y casi evidentemente tampoco estamos pensando en un fluido incompresible.

Quizás valga la pena recalcar que el nuestro es un criterio suficiente, esto es, podemos decidir si una región es inestable frente a una perturbación pero no podemos conocer las condiciones completas que la hacen estable. Hemos escrito las condiciones de estabilidad establecidas en las ecuaciones (23) – (25) de manera general, pero debe tenerse en cuenta que, de cumplirse estas condiciones, el sistema es estable en principio (porque todavía está el segundo sumando de la expresión (16)). Por esta razón hemos puesto el foco en el rol de la presión total: no es que estabilice el plasma, sino que tiende a gobernar oscilaciones estables frente a un dado conjunto de perturbaciones.

Hemos impuesto condiciones sobre la parte puramente radial de la presión (esto es, $P_0(x)$). En principio, parece posible calcular analíticamente la forma de la presión esféricamente simétrica a partir de las ecuaciones (4), (27), (35) y (38). Sin embargo, para ello es menester definir el índice politrópico y, y si bien consideramos que la evolución es adiabática, de ninguna manera podemos decir que es reversible. En este artículo hemos puesto el foco en los efectos de la curvatura del campo, y dejamos para otro el análisis termodinámico de la estabilidad de la configuración.

Nuestro análisis ha procurado considerar estructuras magnéticas lo más amplias posibles. En el caso estacionario más general, con resistividad no nula y considerando nula la componente toroidal de la fuerza magnética (esto es, $\vdash (j\times B)|=0$) puede demostrarse que la forma más completa de la función $W(x)$ es del tipo (Rotstein, 2011)

$$W(x) = A_0 e^{-mx}\left(1+\frac{2}{mx}\right) + A_1\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{x}\right) \qquad (86)$$

donde A_0 y A_1 son constantes arbitrarias y m es una constante numérica distinta de cero. Si m es cero, la única solución posible para el campo magnético, consistente con las condiciones del sistema, es de la forma

$$W(x) = \frac{c_1}{x} + c_2\, x^2 \qquad (87)$$

donde c_1 y c_2 son también constantes positivas. Estas formas permiten reproducir campos de líneas parcialmente abiertas superpuestos a regiones de líneas cerradas. Es fácil ver que el campo dipolar es un caso particular de la solución (87), y aunque no lo hemos hecho, puede demostrarse que la forma (47) es una aproximación plausible a partir de un desarrollo en serie de Taylor del primer sumando de la ecuación (86). De alguna manera, el nuestro es un tratamiento simplificado del caso más general.

Aún así, y a pesar de que el parámetro de curvatura q puede tomar valores en el intervalo [-2; 2) para que campo magnético no diverja, nuestro tratamiento requiere que el parámetro de curvatura adopte un valor máximo (q=1,5) y quede fuera del intervalo

(0;1,17) porque en esos casos nada podemos decir de la estabilidad del sistema.

El último caso que hemos analizado trata del equilibrio en un plasma confinado por una estructura que es superposición de un campo dipolar (q=-1) y uno radial (q=0). Vale la pena mencionar que un campo dipolar superpuesto a uno radial no es un campo propio de un flujo. Es una buena simulación, pero debe tenerse en cuenta que no es lo mismo superponer que estirar y eventualmente romper. Sin embargo, estamos interesados en la situación estática y entonces tiene sentido. En tal caso, puede verse que la amplitud de la región de estabilidad frente a perturbaciones polares queda definida por el valor del parámetro de forma, k. En el caso del campo dipolar puro, el límite siempre es del orden de $\Theta=\pi/4$. De hecho, para k mayor o del orden de 10 las curvas nacen prácticamente en el mismo punto angular, pero a medida que el parámetro k disminuye la región se adelgaza, y esto tiene que ver con el hecho de que la única región marginalmente estable para q=0 es el ecuador.

De acuerdo a nuestro análisis la densidad del plasma es mayor en el ecuador que en los polos. En situación dinámica es razonable porque los flujos se abren y se coliman en los rápidos rotadores, pero en esta situación tiene que ver con el hecho de que la presión tiene un máximo en el ecuador, de manera tal que se requiere mayor densidad para mantener el equilibrio estático.

La pregunta es entonces qué ocurre cuando el equilibrio estático es imposible. La respuesta casi obvia es que el plasma deberá evolucionar a alguna forma de equilibrio dinámico, y dado el riquísimo espectro de ondas MHD parece razonable pensar que es prácticamente imposible tratarlas a todas, pero también parece razonable dedicar un esfuerzo extra al estudio de estas estructuras de flujo, tarea a la que en este momento estamos abocados, porque su estudio posiblemente contribuya y aumente el conocimiento que tenemos acerca de los flujos de plasmas magnetizados y su estabilidad.

REFERENCIAS

Aly, J-J (2012): "Nonlinear stability of a class of magnetostatic equilibria with an application to solar prominences" The Astrophys. Journal, 746, art.52.

Andreussi, T; Morrison, P; Pegoraro, F(2015):"Hamiltonian magnetohydrodynamics Lagrangian, Eulerian, and dynamically accessible stability" Physics of Plasmas, 22, 039903.

Asseo, E; Cesarsky, C; Lachieze Rey, M; Pellat, R (1980): "Energy principle and the interstellar medium. II - Curved equilibria" The Astrophys. Journal, 237, 752-764.

Balbus, S; Potter, W (2016): "Surprises in astrophysical gasdynamics" Rep. Prog. Phys. 79, 066901.

Bernstein, I; Frieman, E; Kruskal, M; Kulsrud, R (1958): "An energy principle for hydromagnetic stability problems" Proc. Royal Soc. London, 244, 17-40.

Demaerel, T; Keppens, R (2016): "Linear stability of ideal MHD configurations. II. Results for stationary equilibrium configurations" Physics of Plasmas, 23, 122118.

Glasser, A; Wang, Z; Park, J (2016): "Computation of resistive instabilities by matched asymptotic expansions" Physics of Plasmas, 23, 112506.

Ham, C; Chapman, I; Simpson, J; Suzuki, Y (2015): "Tokamak equilibria and edge stability when non-axisymmetric fields are applied¨ Plasma Phys. Cntrol Fusion, 57, 054006.

Keppens, R; Demaerel, T (2016): "Stability of ideal MHD configurations. I. Realizing the generality of the G operator" Physics of Plasmas, 23, 122117.

Low, B; Manchester, W (2000): "Equilibrium and Stability of Magnetostatic Atmospheres. I. Dungey-Type Isothermal States" The Astrophys. Journal, 528, 1026-1033.

Newcomb, W (1962): "Lagrangian and Hamiltonian methods in MHD"Nucl. Fusion Suppl, 2, 451.

Porth, O; Komissarov, S (2015): "Causality and stability of cosmic jets" Mon. Not. Royal Astron. Soc, 452, 1089-1104.

Rotstein, N; Ferro Fontán, C (1995): "Magnetohydrodynamic wind solutions in curved magnetic fields" The Astrophys. Journal, 449, 745-763.

Rotstein, N (2011): "Flujos magnetohidro- dinámicos axisimétricos con conductividad finita. I. Geometría esférica" Proyecciones, 9, 27-39.

Rotstein, N; Ferro Fontán, C. (2012): "Flujos magnetohidrodinámicos axisimétricos con conductividad finita. II. Geometría cilíndrica anular" Proyecciones, 10, 61-75.

Tronci, C; Tassi, E; Camporeale, E; Morrison, P (2014): "Hybrid Vlasov-MHD models: Hamiltonian vs. non-Hamiltonian" Plasma Phys. Control. Fusion, 56, 095008.

Tsinganos, K (1982): "MHD equilibrium. III - Helically symmetric fields. IV - Nonequilibrium of nonsymmetric hydrodynamic topologies" The Astrophys. Journal, 252, 775.

Zweibel, E (1981): "MHD instabilities of atmospheres with magnetic fields" The Astrophys. Journal, 249, 731-745.