

Diseño y Simulación de Filtros FIR de Fase Lineal en Matlab® y Simulink®

Jorge L. Naguil¹, Lucas D. Gabutti¹, Ezequiel Brac¹, Guillermo Gutierrez²

Instituto Universitario Aeronáutico, Av. Fuerza Aérea 6500, CP(5010) Córdoba, Argentina.

Tel: 5688800 (34416), jnaguil@iua.edu.ar, lucasgabutti@gmail.com, ebrac@iua.edu.ar.

CUDAR - Centro Universitario de Desarrollo en Automación y Robótica, Universidad Tecnológica Nacional, FRC. Maestro Marcelo López y Cruz Roja Argentina, CP(5016) Córdoba, Argentina.

Tel: 4684006(121), fgutierrez@scdt.frc.utn.edu.ar

RESUMEN - El presente trabajo ha sido desarrollado en forma conjunta entre el Instituto Universitario Aeronáutico y la Universidad Tecnológica Nacional –Facultad Regional Córdoba, en virtud del convenio vigente entre ambas instituciones, en el marco del proyecto "Compresión de Video con Wavelets en Lógica Programable".

Este trabajo tiene como objetivo el diseño y simulación de filtros FIR (Finite Impulse Response) de fase lineal empleando las herramientas de Matlab® y Simulink®.

En primer lugar se presenta una descripción conceptual y teórica sobre filtros FIR y luego se procede al diseño y posterior simulación de los mismos.

Se presentarán también algunas alternativas para el diseño tales como el empleo de ventanas para recortar la respuesta infinita, y la implementación de diferentes tipos de filtros (pasa-bajos, pasa-altos, pasa-banda y elimina-banda), cada uno con su respectiva simulación.

Palabras claves: Filtros digitales, filtros FIR, ventanas

ABSTRACT - This report has been generated as a partial result in the framework of a research project on Video Compression with Wavelets using Programmable Logic, a joint endeavour agreed upon by the Instituto Universitario Aeronáutico and the Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Córdoba.

The objective of this report is to demonstrate the design and simulation of linear phase FIR filters (finite impulse response filters) using Matlab® and Simulink® as design and validation tools.

The report begins with a conceptual and theoretical description of FIR filters, continuing with the filters design and ending with their simulation.

Some design alternatives are also discussed, like windowing of infinite response, and the implementation of different filter types (low-pass, high-pass, band-pass and band-reject responses), with their respective simulation.

Keywords: Linear digital filters, FIR filters, windows.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años los filtros digitales han sustituido a los filtros analógicos en muchas aplicaciones debido a su mayor flexibilidad y superiores prestaciones. Los filtros digitales se diseñan para modificar de una manera específica las características espectrales de las señales en tiempo discreto, en forma análoga a los filtros analógicos.

En ciertas aplicaciones en las que se desea filtrar una señal en tiempo continuo, se digitaliza la señal con un conversor análogo-digital, se realiza el filtrado digital y finalmente se transforma la señal a tiempo continuo mediante un conversor digital-analógico.

El avance de las tecnologías digitales ha potenciado esta metodología de filtrado. Por lo cual se ha hecho habitual su utilización. Lo que lleva a analizar los sistemas en tiempo discreto y las metodologías de filtrado en este dominio temporal [1].

Cualquier sistema de tiempo discreto lineal e in-

variante en el tiempo puede ser caracterizado mediante la siguiente expresión:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (1)$$

o, equivalentemente, la función de transferencia (transformada Z), se puede expresar como:

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} / \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) \quad (2)$$

donde los a_k y los b_k determinan los parámetros del sistema y las características de respuesta en frecuencia del mismo.

La función de transferencia $H(z)$ es un cociente de polinomios en z^{-1} , con lo que se pueden obtener los polos y ceros de la misma. En general, cualquier sistema FIR se describe mediante la ecuación:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (3)$$

donde se ve que la salida no depende de valores previos de la misma, pero sí depende de valores actuales y/o previos de la entrada, por lo que se dice que es un sistema no recursivo.

Equivalentemente, la función de transferencia está dada por:

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (4)$$

Así se puede ver que la respuesta en frecuencia posee M polos en el origen, y M ceros. Esto hace que los FIR sean siempre estables. Es importante destacar que el parámetro M es el orden del filtro, es decir, el orden del polinomio, y que el número de coeficientes será $M+1$, como se puede ver en las ecuaciones (3) y (4).

FILTROS FIR DE FASE LINEAL

Hay una clase muy importante de filtros FIR que son los que poseen fase lineal, esto es, la respuesta en fase del sistema es una recta en la banda pasante.

Este caso de filtros FIR se da cuando los coeficientes b_k son simétricos o antisimétricos. A su vez, el orden del filtro (M) puede ser par o impar, por lo que se puede clasificar en cuatro tipos a los filtros FIR de fase lineal. Estos son:

- I. M par, b_k simétricos
- II. M impar, b_k simétricos
- III. M par, b_k antisimétricos
- IV. M impar, b_k antisimétricos

Tipo I. M par y coeficientes simétricos

Para este caso los coeficientes cumplen la relación $b_i = b_{M-i}$. Como M es par, habrá una cantidad impar ($M+1$) de coeficientes, por lo que el coeficiente $b_{M/2}$ no tendrá su respectivo par. Se recuerda que los índices de los coeficientes van de cero a M . La función de transferencia estará dada por:

$$H(z) = z^{-\frac{M}{2}} \left[b_{\frac{M}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} b_k (z^{M/2-k} + z^{-(M/2-k)}) \right] \quad (5)$$

Por ejemplo, si $M = 4$, se cumplen las siguientes relaciones:

$$H(z) = z^{-2} \left[b_2 + \sum_{k=0}^1 b_k (z^{2-k} + z^{-(2-k)}) \right]; \quad \begin{matrix} b_0 = b_4 \\ b_1 = b_3 \end{matrix}$$

Para evaluar la respuesta en frecuencia del sistema y, consecuentemente, la respuesta en fase, se reemplaza $z = e^{j\omega}$ directamente en la ecuación de la función de transferencia.

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \left[b_{\frac{M}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} b_k \left(e^{j\omega \left(\frac{M}{2}-k \right)} + e^{-j\omega \left(\frac{M}{2}-k \right)} \right) \right]$$

Teniendo en cuenta que $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos(\theta)$, se tiene:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \left[b_{\frac{M}{2}} + 2 \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} b_k \cos \omega \left(\frac{M}{2}-k \right) \right] \quad (6)$$

$$= e^{j\theta(\omega)} H_R(\omega)$$

De la ecuación (6) se ve que la función $H_R(\omega)$ es real pura, por lo que la fase del sistema estará dada por $\theta(\omega)$, es decir:

$$\theta(\omega) = -\frac{\omega M}{2} + \pi \frac{[1 - \text{sgn}(H_R(\omega))]}{2} \quad (7)$$

El segundo término del miembro derecho de (7) existe sólo cuando $H_R(\omega)$ es negativa, con lo que la fase del sistema se desplaza 180° o π radianes. De esta manera se ve que la fase es lineal. El retardo de grupo en este caso es constante, ya que:

$$GD = \frac{d\theta}{d\omega} = -\frac{M}{2} \quad (8)$$

Tipo II. M impar y coeficientes simétricos

Como M es impar, habrá una cantidad par ($M+1$) de coeficientes, que cumplen con la condición $b_i = b_{M-i}$. La función de transferencia estará dada por:

$$H(z) = z^{-M/2} \sum_{k=0}^{M/2} b_k (z^{M/2-k} + z^{-(M/2-k)}) \quad (9)$$

Como ejemplo, se elige $M=5$ y se cumplen las siguientes relaciones:

$$H(z) = z^{-2.5} \sum_{k=0}^2 b_k (z^{2.5-k} + z^{-(2.5-k)}); \quad \begin{matrix} b_0 = b_5, b_2 = b_3 \\ b_1 = b_4 \end{matrix}$$

Reemplazando nuevamente $z = e^{j\omega}$, la respuesta en frecuencia es:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{k=0}^{M/2} b_k (e^{j\omega(M/2-k)} + e^{-j\omega(M/2-k)})$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left[2 \sum_{k=0}^{M/2} b_k \cos \omega \left(\frac{M}{2} - k \right) \right] = (10)$$

$$= e^{j\theta(\omega)} H_R(\omega)$$

Se puede ver que la fase de (10) es idéntica al caso anterior, por lo que la respuesta en fase está dada por la ecuación (7) y el retardo de grupo por la ecuación (8).

Tipo III. M par y coeficientes antisimétricos

Como M es par, habrá una cantidad impar ($M+1$) de coeficientes que deberán cumplir con la relación $b_i = -b_{M-i}$ excepto el coeficiente $b_{M/2}$ que debe ser cero para mantener la condición de antisimetría. La función de transferencia está dada por:

$$H(z) = z^{-M/2} \sum_{k=0}^{M/2-1} b_k (z^{M/2-k} - z^{-(M/2-k)}) \quad (11)$$

Por ejemplo, para $M=4$, se cumplen las siguientes relaciones:

$$H(z) = z^{-2} \sum_{k=0}^1 b_k (z^{2-k} - z^{-(2-k)}); \quad b_0 = b_4, \quad b_2 = 0$$

$$b_1 = b_3$$

Reemplazando $z = e^{j\omega}$ y teniendo en cuenta que $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin(\theta) = 2e^{j\pi/2} \sin(\theta)$, la función de respuesta en frecuencia queda como sigue:

$$H(e^{j\omega}) = 2e^{-\frac{j(\omega M - \pi)}{2}} \sum_{k=0}^{M/2-1} b_k \sin \omega \left(\frac{M}{2} - k \right) = (12)$$

$$= e^{j\theta(\omega)} H_R(\omega)$$

Entonces la fase está dada por:

$$\theta(\omega) = -\frac{\omega M - \pi}{2} + \pi \frac{[1 - \text{sgn}(H_R(\omega))]}{2} \quad (13)$$

Se puede ver que la expresión para la fase sigue siendo lineal. El retardo de grupo no se ve alterado con respecto al caso I y II, por lo que sigue dado por la expresión (8).

Tipo IV. M impar y coeficientes antisimétricos

Como M es impar, habrá una cantidad par ($M+1$) de coeficientes, que cumplen con la condición

$b_i = b_{M-i}$. La función de transferencia estará dada por:

$$H(z) = z^{-M/2} \sum_{k=0}^{M/2} b_k (z^{M/2-k} - z^{-(M/2-k)}) \quad (14)$$

Como ejemplo para $M=5$ se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$H(z) = z^{-2.5} \sum_{k=0}^1 b_k (z^{2.5-k} - z^{-(2.5-k)}); \quad b_0 = b_5, \quad b_2 = b_3$$

$$b_1 = b_4$$

Reemplazando nuevamente $z = e^{j\omega}$, la respuesta en frecuencia es:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{k=0}^{M/2} b_k (e^{j\omega(M/2-k)} - e^{-j\omega(M/2-k)})$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M - \pi}{2}} \left[2 \sum_{k=0}^{M/2} b_k \sin(\omega(M/2 - k)) \right]$$

$$= e^{j\theta(\omega)} H_R(\omega)$$

Al igual que los filtros tipo III, la fase estará dada por (13) y el retardo de grupo por (8).

Filtros de fase lineal. Consideraciones generales

En la Fig. 1 se muestran las respuestas en frecuencia de cada tipo de filtros con $M=4$ y $M=5$ según corresponda y eligiendo $b_k = 1$.

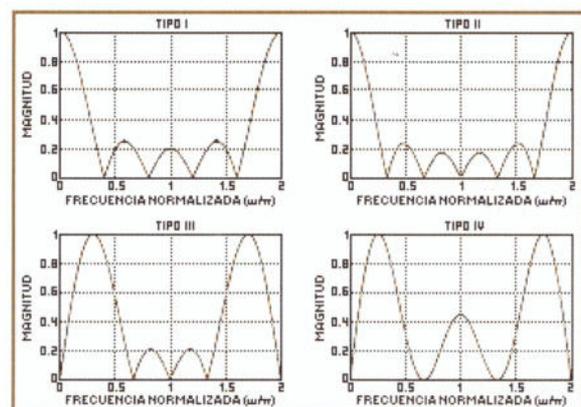


Fig. 1: Respuesta en frecuencia de cada tipo de filtros

Tomando $F = \omega/\pi$ como la frecuencia normalizada, y teniendo en cuenta que la frecuencia máxima de entrada de cualquier filtro es la de Nyquist, es decir, $F = 1$ (la mitad de la frecuencia

de muestreo, tomada en este caso como 2π), se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- Los filtros tipo II tienen una respuesta distinta de cero en $F=0$, pero es cero cuando $F=1$, por lo que son adecuados para implementar filtros pasa-bajos.
- Los filtros tipo III tienen respuesta cero para $F=0$ y $F=1$, por lo que sólo son útiles para implementar filtros pasa-banda.
- Los filtros tipo IV poseen una respuesta nula para $F=0$ y no nula para $F=1$, por lo que se los utiliza para filtros pasa-banda y pasa-altos.
- Por último, los filtros tipo I, exhiben una respuesta no nula tanto en $F=0$ como $F=1$ y se los utiliza para implementar cualquier tipo de filtros, y además, son los únicos capaces de implementar filtros elimina-banda.

Estructura para filtros FIR

La ecuación (3) se puede implementar en hardware de varias maneras, y cada una de ellas define una estructura para el sistema FIR. Entre las estructuras más comunes [2] y [3] se pueden mencionar las siguientes:

- Directa
- Cascada
- Muestreo en frecuencia
- Celosía

Una estructura típica de forma directa se puede ver en la Fig. 2. Se ve que sólo está constituida por retardos unitarios, sumadores y multiplicadores. Estos últimos están representados como bloques de ganancia que dependen del valor de los coeficientes y pueden ser positivos o negativos.

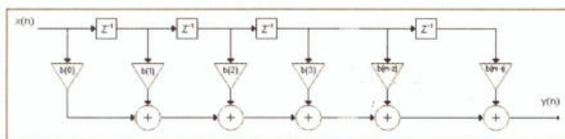


Fig. 2: Estructura en forma directa

En este trabajo sólo se desarrollará la forma directa para el diseño de filtros FIR.

DISEÑO DE FILTROS FIR USANDO VENTANAS

El diseño de filtros que se hará estará basado en ventanas, aunque hay muchos otros modelos para diseñarlos, como el método de muestreo en frecuencia y filtros óptimos de rizado constante.

NOTA: a partir de este momento, y en lo que resta del documento, se cambiará la notación con respecto a los coeficientes siendo $b_k = b(k)$.

Marco teórico

Si se reemplaza $z = e^{j\omega}$ de la ecuación (4) obtenemos la función de respuesta en frecuencia de cualquier filtro FIR, esto es:

$$H(z)|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b(k)e^{-jk\omega} \quad (15)$$

Si se cambia el rango de k para que recorra todo el dominio, es decir, $-\infty < k < \infty$, entonces, (15) se convierte en la DTFT (Discret-Time Fourier Transform) de la serie de los $b(k)$.

De esta forma, la respuesta ideal deseada del filtro sería:

$$H_{id}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{b}(k)e^{-jk\omega} \quad (16)$$

donde los $\tilde{b}(k)$ son los infinitos coeficientes que conforman $H_{id}(e^{j\omega})$. Estos coeficientes se pueden calcular a través de la antitransformada de Fourier de tiempo discreto:

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{id}(e^{j\omega}) e^{jk\omega} d\omega \quad (17)$$

Pero esta respuesta ideal deseada es físicamente irrealizable, pues, requiere una cantidad infinita de coeficientes, es decir, una cantidad infinita de multiplicaciones y sumas y, por consiguiente, una cantidad infinita de hardware.

Por eso es que se debe truncar esta respuesta en una longitud $M+1$, donde M es el orden del filtro. Este truncamiento es equivalente a multiplicar los $\tilde{b}(k)$ por una ventana rectangular de la forma:

$$w(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, M \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$$

De esta manera, los coeficientes del filtro serán $b_k = w_k \tilde{b}_k$, o sea:

$$b(k) = \begin{cases} \tilde{b}(k), & k = 0, 1, \dots, M \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$$

En la Fig. 3 se pueden ver las respuestas en frecuencia ideales de los filtros básicos, esto es, el pasabajo, pasaaalto, pasabanda y elimina-banda. Las regiones grisadas indican las bandas de paso.

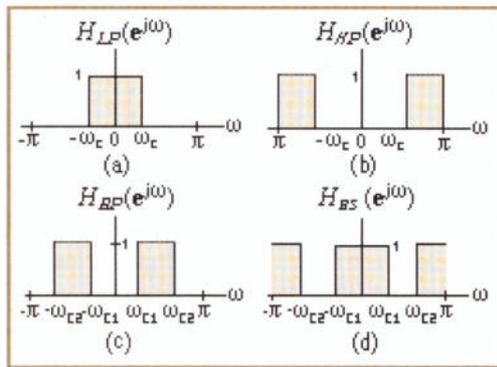


Fig. 3: Respuesta en frecuencia ideal de las tipologías básicas (a) pasa-bajos, (b) pasa-altos, (c) pasa-banda y (d) elimina-banda

Así por ejemplo, la respuesta ideal del pasabajo será:

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_C \\ 0, & |\omega| \geq \omega_C \end{cases}$$

Entonces los coeficientes para esta respuesta ideal se calculan a partir de (17) como sigue:

$$\tilde{b}_{LP}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_C}^{\omega_C} e^{jk\omega} d\omega = \frac{\sin(\omega_C k)}{\pi k}$$

Aplicando el teorema de L'Hôpital, llegamos a la expresión final de los coeficientes ideales:

$$\tilde{b}_{LP}(k) = \begin{cases} \omega_C/\pi, & k = 0 \\ \sin(\omega_C k)/\pi k, & k \neq 0 \end{cases}$$

De manera similar se obtienen las expresiones para el resto de las tipologías. A continuación se resumen las ecuaciones para calcular los coeficientes ideales de las cuatro tipologías:

$$\tilde{b}_{LP}(k) = \begin{cases} \omega_C/\pi, & k = 0 \\ \sin(\omega_C k)/\pi k, & k \neq 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$\tilde{b}_{HP}(k) = \begin{cases} 1 - \omega_C/\pi, & k = 0 \\ -\sin(\omega_C k)/\pi k, & k \neq 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\tilde{b}_{BP}(k) = \begin{cases} (\omega_{C2} - \omega_{C1})/\pi, & k = 0 \\ \frac{\sin(\omega_{C2} k) - \sin(\omega_{C1} k)}{\pi k}, & k \neq 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$\tilde{b}_{BS}(k) = \begin{cases} 1 - (\omega_{C2} - \omega_{C1})/\pi, & k = 0 \\ \frac{\sin(\omega_{C1} k) - \sin(\omega_{C2} k)}{\pi k}, & k \neq 0 \end{cases} \quad (21)$$

Para estos cuatro casos, $-\infty < k < \infty$.

Funciones Ventana

El problema principal de la ventana rectangular es que presenta lóbulos laterales relativamente grandes con respecto al lóbulo principal, independientemente del valor de M . Esto se debe a la discontinuidad abrupta de la ventana rectangular. Los lóbulos pueden ser reducidos mediante la aplicación de otros tipos de ventanas. Las ventanas básicas para el diseño de filtros FIR se enumeran en la tabla 1, en la que se asume que $0 \leq k \leq M$.

Bartlett	$w(k) = \begin{cases} \frac{2k}{M}, & 0 \leq k \leq \frac{M}{2}; M \text{ par} \\ 2 - \frac{2k}{M}, & \frac{M}{2} \leq k \leq M \end{cases}$
	$w(k) = \begin{cases} \frac{2k}{M}, & k \leq \frac{M+1}{2} - 1; M \text{ impar} \\ \frac{2(M-k)}{M}, & \frac{M+1}{2} \leq k \leq M \end{cases}$
Blackman	$w(k) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi k}{M}\right)$
Hamming	$w(k) = 0.54 - 0.46 \cos\left(2\pi \frac{k}{M}\right)$
Hann	$w(k) = 0.5 \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{k}{M}\right) \right]$
Kaiser	$w(k) = \frac{I_0\left(\alpha \sqrt{1 - (2k/M - 1)^2}\right)}{I_0(\alpha)}$

Tabla 1: Ventanas básicas para diseño de filtros FIR

Para el caso de la ventana de Kaiser, I_0 es la función de Bessel modificada de primer tipo y orden cero. Los valores de α se dan a continuación:

$$\alpha = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & A_{MIN} \geq 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 < A_{MIN} < 50 \\ 0, & A_{MIN} \leq 21 \end{cases} \quad (22)$$

donde A_{MIN} es la atenuación mínima requerida para la banda rechazada.

Procedimiento de diseño

A continuación se enumeran los pasos básicos para diseñar un filtro FIR.

Paso 1: Dependiendo de la naturaleza de la respuesta en frecuencia, se elige el valor de M y se usan las ecuaciones (18), (19), (20) y (21) para calcular el valor de los coeficientes para $-N \leq k \leq N$, siendo $N = (L - 1)/2$ si L es impar o $N = L/2$ si L es par y $L = M + 1$ es la longitud de un filtro de orden M . De esta manera se aplica una ventana rectangular de longitud L .

Paso 2: Una vez obtenidos los coeficientes, se deben atrasar N muestras para obtener los coeficientes del filtro FIR (de ventana rectangular), esto es, $b_{rect}(k) = \tilde{b}(k + N)$. Así quedan los coeficientes expresados para $0 \leq k \leq M$ según la ecuación (3).

Paso 3: Seguidamente se elige la ventana a conveniencia y se multiplica por los coeficientes calculados en el paso 2, es decir, $b(k) = w(k)b_{rect}(k)$. Estos coeficientes corresponden al filtro FIR de longitud $L = M + 1$ y orden M , que es el filtro no ideal al haberle aplicado una ventana.

Ejemplo 1: Diseñar un filtro pasabanda con frecuencia de corte inferior en $\omega_{c1} = 0.2\pi$ y superior en $\omega_{c2} = 0.6\pi$. Truncar la respuesta infinita mediante la ventana de Hamming. El orden del filtro es $M=10$.

Como el orden del filtro es 10, la longitud del mismo es 11, por lo tanto tenemos una cantidad impar de coeficientes que estarán dados por la ecuación (20):

$$\tilde{b}_{BP}(k) = \begin{cases} \frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{\pi}, & k = 0 \\ \frac{\sin(\omega_{c2}k) - \sin(\omega_{c1}k)}{\pi k}, & k \neq 0 \end{cases}; |k| \leq N$$

En este caso, $N = M/2 = 5$, por lo que $-5 \leq k \leq 5$ y como el número de coeficientes es impar, el $\tilde{b}_{BP}(0)$ existe.

Luego, se deben retardar los coeficientes por un valor de $N=5$ muestras para llegar a la expresión para el filtro FIR, entonces:

$$b_{BP}(k) = \tilde{b}_{BP}(k + N) = \tilde{b}_{BP}(k + 5)$$

para $0 \leq k \leq M = 10$.

Los coeficientes de la ventana de Hamming que se muestran en la tabla 1 se obtuvieron mediante la ecuación:

$$w(k) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right); 0 \leq k \leq 10$$

Finalmente se obtienen los coeficientes del filtro FIR no ideal a través de la multiplicación de los coeficientes del filtro de ventana rectangular por los coeficientes de la ventana de Hamming, es decir, $b(k) = b_{BP}(k)w(k)$.

En la tabla 2 se resumen los valores de todos los coeficientes mencionados.

k	$\tilde{b}_{BP}(k)$	$b_{BP}(k)$	$w(k)$	$b(k)$
-5	0.0	-----	-----	-----
-4	0.0289	-----	-----	-----
-3	-0.1633	-----	-----	-----
-2	-0.2449	-----	-----	-----
-1	0.1156	-----	-----	-----
0	0.4	0.0	0.0800	0.0000
1	0.1156	0.0289	0.1679	0.0049
2	-0.2449	-0.1633	0.3979	-0.0650
3	-0.1633	-0.2449	0.6821	-0.1671
4	0.0289	0.1156	0.9121	0.1055
5	0.0	0.4	1.0000	0.4000
6	-----	0.1156	0.9121	0.1055
7	-----	-0.2449	0.6821	-0.1671
8	-----	-0.1633	0.3979	-0.0650
9	-----	0.0289	0.1679	0.0049
10	-----	0.0	0.0800	0.0000

Tabla 2: Coeficientes del filtro del ejemplo 1

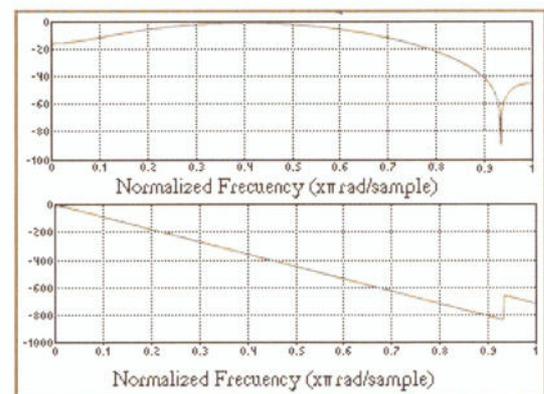


Fig. 4: Respuesta del filtro, magnitud y fase

La Fig. 4 muestra la respuesta en frecuencia y en fase del filtro diseñado en este ejemplo. Se puede ver que el filtro corta en 0.2π y 0.6π , frecuencias en las que la magnitud cae 6 dB.

SIMULACIÓN EN MATLAB Y SIMULINK

Funciones *fir1* y *magn*

Los coeficientes de los filtros que se simularon se obtuvieron mediante la función de matlab llamada *fir1*.

El uso de la función es el siguiente:

$$B = \text{fir1}(N, Wn, \text{Tipo}, \text{Window});$$

donde N es el orden del filtro y Wn la frecuencia de corte normalizada a la mitad de la frecuencia de muestreo. Este argumento puede ser un vector en el que cada par de elementos representa una banda de paso o una banda de rechazo, según corresponda. *Tipo* es una cadena de caracteres que puede tomar valores 'low', 'high', 'band' o 'stop' e indica si el filtro es pasabajo, pasaalto, pasabanda o elimina-banda respectivamente. *Window* es la ventana que se utilizará para recortar la respuesta infinita del filtro ideal.

Una vez que se obtienen los coeficientes, se puede graficar la respuesta en frecuencia del filtro a través de la función *magn* (creada por los autores).

El uso de *magn* es:

$$\text{magn}(B, Fs);$$

donde B es el vector de coeficientes del filtro y Fs es la frecuencia de muestreo.

Modelo en Simulink

Los filtros que se simularon son del tipo I, es decir, de cantidad impar de coeficientes simétricos, donde $b(k) = b(M - k)$ para $0 \leq k \leq M$.

Este hecho ofrece la ventaja de poder ahorrar en hardware, ya que al tener coeficientes simétricos, se necesita un sólo multiplicador en lugar de dos como muestra la Fig. 5. Este filtro FIR se almacena en un subsistema, llamado FIR, para la simulación en Simulink.

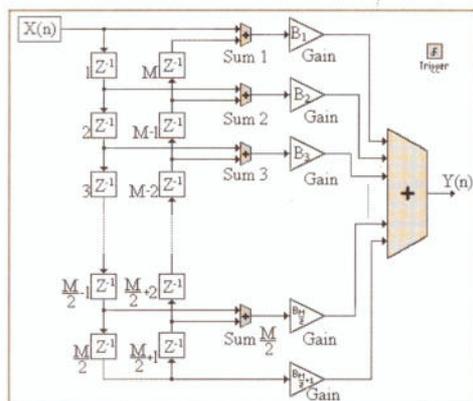


Fig. 5: Estructura directa modificada

El bloque Trigger hace que el subsistema FIR tenga una entrada de reloj para actualizar los retardos.

El sistema a simular en Simulink se muestra en la Fig.6.

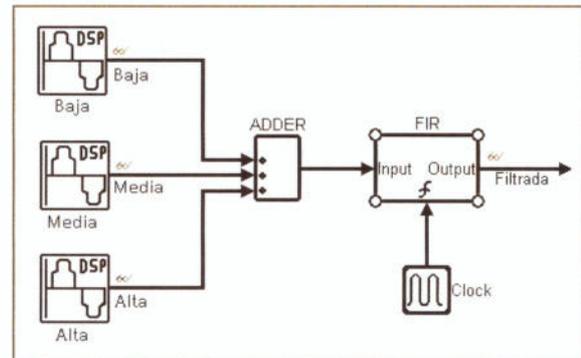


Fig. 6: Sistema a simular

Se pueden ver tres generadores de onda a distintas frecuencias, llamadas Baja (F1), Media (F2) y Alta (F3), un sumador y luego el filtro FIR.

Además se tiene el Clock que gobierna los retardos.

Los "anteojos" indican que la señal a través de esa línea se visualizará en el tiempo a medida que corra la simulación.

Filtro pasabajo de orden 20

Las características del filtro simulado son las siguientes:

$$F1 = 100 \text{ Hz}; F2 = 1000 \text{ Hz}; F3 = 2000 \text{ Hz}; Fs = 10000 \text{ Hz}; Fc = 100 \text{ Hz}; \text{Tipo: pasabajo}; M = 20; L = M+1 = 21; \text{Ventana: Hamming}$$

donde $F1$, $F2$ y $F3$ son las frecuencias de los generadores de onda, Fs es la frecuencia de muestreo, Fc es la frecuencia de corte, M es el orden del filtro y L es la longitud del mismo, es decir, el número de coeficientes.

El siguiente código genera los coeficientes, que son tomados automáticamente por los multiplicadores del sistema en Simulink.

$$b = \text{fir1}(20, 100/(10e3/2), 'low', \text{hamming}(21));$$

Los valores de los mismos se listan en la tabla 3.

La respuesta en frecuencia se ve en la Fig.7, donde están marcadas las frecuencias de los tres generadores y sus niveles.

k	b(k)	k	b(k)
0	0.0070	11	0.0908
1	0.0090	12	0.0845
2	0.0149	13	0.0749
3	0.0243	14	0.0627
4	0.0361	15	0.0494
5	0.0494	16	0.0361
6	0.0627	17	0.0243
7	0.0749	18	0.0149
8	0.0845	19	0.0090
9	0.0908	20	0.0070
10	0.0929		

Tabla 3: Coeficientes para Pasa-Bajos

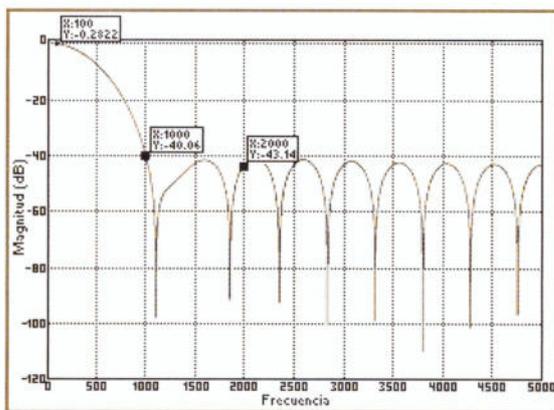


Fig. 7: Respuesta en frecuencia

La simulación en Simulink se corrió durante 50 milisegundos y el diagrama temporal se puede ver en la Fig.8. Allí se nota perfectamente cómo en la salida del sistema queda sólo la señal de baja frecuencia.

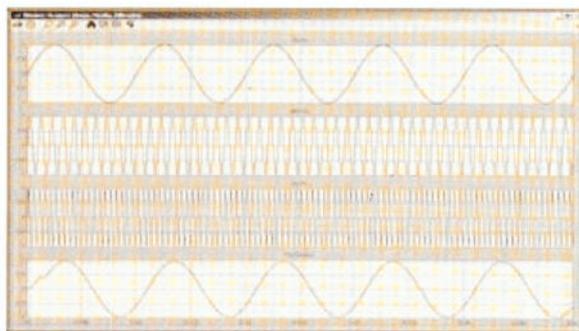


Fig. 8: Diagrama temporal

Las características del filtro simulado son las siguientes:

$F1 = 100 \text{ Hz}; F2 = 1000 \text{ Hz}; F3 = 2000 \text{ Hz}; F_s = 10000 \text{ Hz}; Fc1 = 800 \text{ Hz}; Fc2 = 1200 \text{ Hz};$ Tipo: pasabanda; $M = 20; L = M+1 = 21;$ Ventana: Kaiser, $A_{min} = 25$

El siguiente código genera los coeficientes.

```
b = fir1(20, [800 1200]/(10e3/2), 'band',
        kaiser2(21, 25));
```

La función **Kaiser2** (creada por los autores) calcula los coeficientes para la ventana de Kaiser donde el primer argumento es la longitud y el segundo es la atenuación mínima en la banda rechazada. Los coeficientes para esta simulación se exhiben en la tabla 4.

k	b(k)	k	b(k)
0	0.0587	11	0.0932
1	0.0545	12	0.0349
2	0.0235	13	-0.0338
3	-0.0260	14	-0.0847
4	-0.0743	15	-0.0987
5	-0.0987	16	-0.0743
6	-0.0847	17	-0.0260
7	-0.0338	18	0.0235
8	0.0349	19	0.0545
9	0.0932	20	0.0587
10	0.1159		

Tabla 4: Coeficientes para Pasa-Banda

La respuesta en frecuencia se ve en la Fig.9, donde están marcadas las frecuencias de los tres generadores y sus niveles. La simulación en Simulink se corrió durante 50 milisegundos y el diagrama temporal se puede ver en la Fig.10, donde la señal de salida es de 1000 Hz.

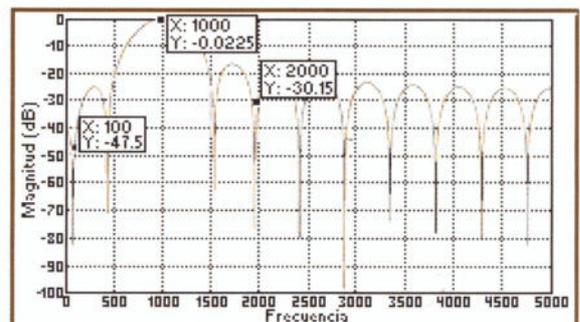


Fig. 9: Respuesta en frecuencia

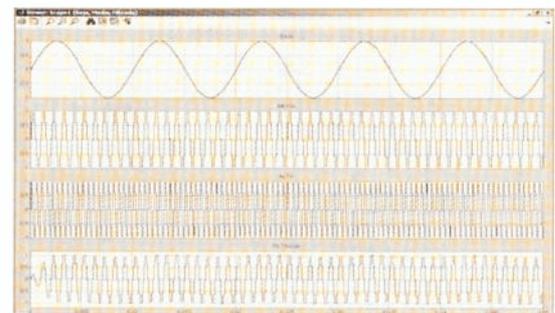


Fig. 10: Diagrama temporal

Las características del filtro simulado son las siguientes:

$F1 = 100 \text{ Hz}; F2 = 1000 \text{ Hz}; F3 = 2000 \text{ Hz}; F_s = 10000 \text{ Hz}; F_{c1} = 500 \text{ Hz}; F_{c2} = 1500 \text{ Hz};$ Tipo: elimina-banda; $M = 20; L = M+1 = 21;$ Ventana: Kaiser, $A_{min} = 25$

El siguiente código genera los coeficientes.

```
b = fir1(20, [500 1500]/(10e3/2), 'stop', kaiser2(21, 25));
```

Los coeficientes se listan en la tabla 5.

La respuesta en frecuencia se ve en la Fig. 11, donde están marcadas las frecuencias de los tres generadores y sus niveles. La simulación en Simulink se corrió durante 50 milisegundos y el diagrama temporal se puede ver en la Fig. 12, donde la señal de 1000 Hz ha sido eliminada.

k	b(k)	k	b(k)
0	-0.0408	11	-0.0648
1	-0.0379	12	-0.0243
2	-0.0163	13	0.0235
3	0.0181	14	0.0589
4	0.0516	15	0.0686
5	0.0686	16	0.0516
6	0.0589	17	0.0181
7	0.0235	18	-0.0163
8	-0.0243	19	-0.0379
9	-0.0648	20	-0.0408
10	0.9266		

Tabla 5: Coeficientes para Elimina-Banda

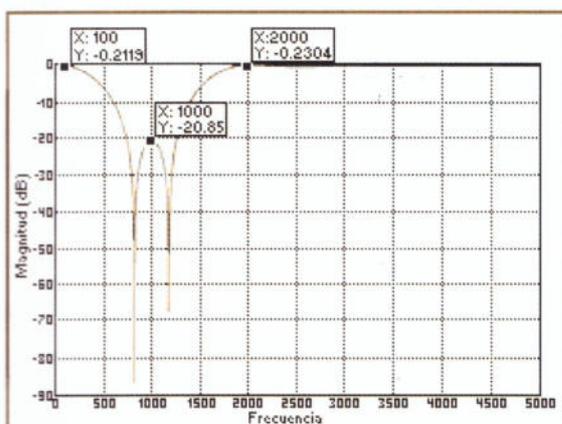


Fig.11: Respuesta en frecuencia

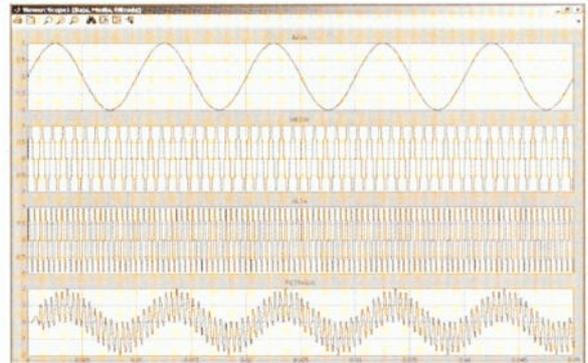


Fig.12: Diagrama temporal

Filtro Pasa Altos de orden 40

Las características del filtro simulado son las siguientes:

$F1 = 1500 \text{ Hz}; F2 = 1800 \text{ Hz}; F3 = 2000 \text{ Hz}; F_s = 10000 \text{ Hz}; F_c = 2000 \text{ Hz};$ Tipo: pasaalto; $M = 40;$ $L = M+1 = 41;$ Ventana: kaiser, $A_{min} = 35$

El siguiente código genera los coeficientes.

```
b=fir1(40,2000/(10e3/2),'high',kaiser2(41, 35));
```

Los coeficientes se listan en la tabla 6. La respuesta en frecuencia se ve en la Fig. 13, donde están marcadas las frecuencias de los tres generadores y sus niveles.

La simulación en Simulink se ejecutó durante 50 milisegundos y el diagrama temporal se muestra en la Fig. 14, donde se puede ver que en la salida sólo quedó la señal de 2000 Hz, y se eliminaron, aunque no completamente, las señales de 1800 y 1500 Hz. El riple que quedó en la salida se debe a que las señales se encuentran muy próximas, por lo que es necesario que el filtro tenga mayor orden para eliminarlas completamente.

k	b(k)	k	b(k)	k	b(k)
0	-0.0000	14	-0.0473	28	0.0208
1	0.0072	15	0.0000	29	0.0289
2	0.0052	16	0.0738	30	-0.0000
3	-0.0060	17	0.0616	31	-0.0218
4	-0.0111	18	-0.0933	32	-0.0117
5	0.0000	19	-0.3036	33	0.0103
6	0.0146	20	0.6028	34	0.0146
7	0.0103	21	-0.3036	35	0.0000
8	-0.0117	22	-0.0933	36	-0.0111
9	-0.0218	23	0.0616	37	-0.0060
10	-0.0000	24	0.0738	38	0.0052
11	0.0289	25	0.0000	39	0.0072
12	0.0208	26	-0.0473	40	-0.0000
13	-0.0244	27	-0.0244		

Tabla 6: Coeficientes para Pasa-Altos

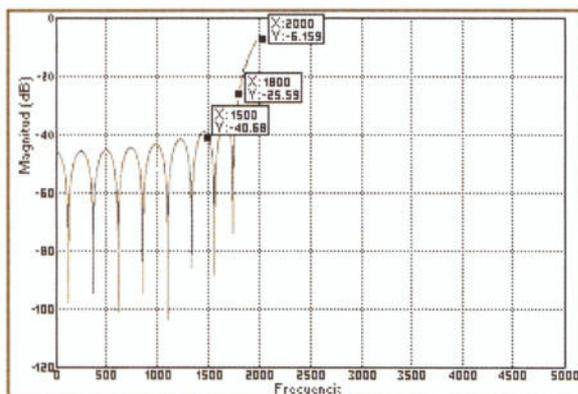


Fig. 13: Respuesta en frecuencia

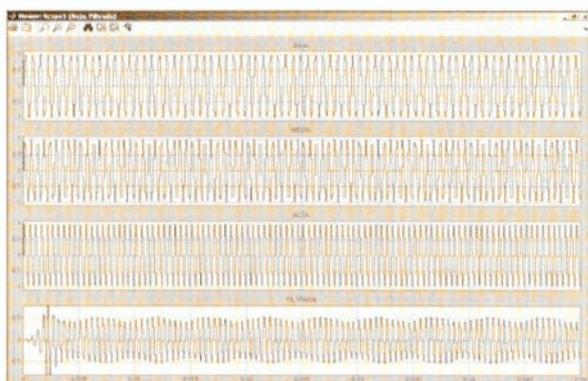


Fig. 14: Diagrama temporal

Comparación entre ventanas

En esta sección se presenta una comparación entre distintas ventanas aplicadas al diseño de la sección Filtro elimina-banda de orden 20.

La ventana utilizada en la sección mencionada fue la de Kaiser. A continuación se mostrará en las Fig. 15 y 16 la respuesta en frecuencia de magnitud y fase respectivamente, pero implementado con todas las ventanas, es decir, Kaiser, Hamming, Hann, Bartlett y Blackman.

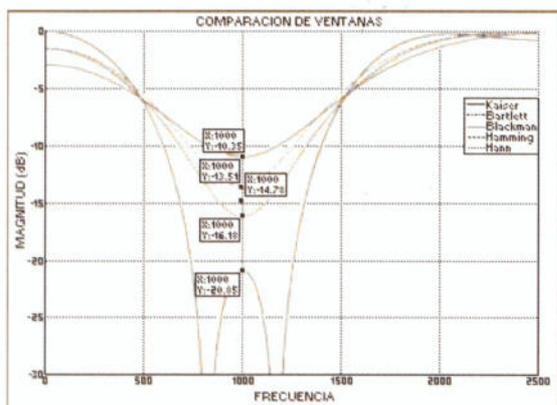


Fig. 15: Comparación de ventanas, magnitud

Se puede ver claramente la diferencia de respuesta en frecuencia entre la ventana de Kaiser y el resto de las ventanas, en donde la implementación con Kaiser atenúa 20 dB en la banda de rechazo, y la mejor de las otras cuatro (Hamming) atenúa 16 dB.

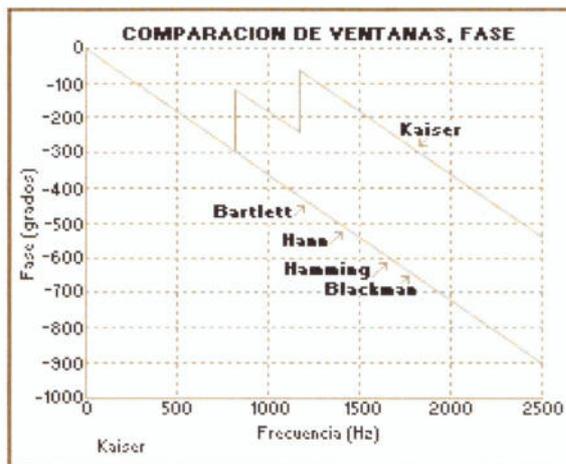


Fig. 16: Comparación de ventanas, fase

En cuanto a la respuesta en fase (Fig. 16), se ve que todas son lineales en las bandas de paso e incluso lineales sobre todo el espectro, salvo la ventana de Kaiser que presenta discontinuidad en la banda de rechazo, lo cual no es un problema ya que esas frecuencias están muy atenuadas.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se presentó el diseño de filtros FIR (Finite Impulse Response) y su posterior simulación con Matlab y Simulink, obteniendo resultados similares entre el modelo matemático y el modelo de simulación.

Asimismo se presentaron las ventanas básicas que son utilizadas en el diseño de filtros FIR para recortar la frecuencia infinita de los filtros ideales.

Se espera que este trabajo sirva de plantilla para los interesados en desarrollar filtros de este tipo y así reducir su trabajo de investigación bibliográfica.

REFERENCIAS

[1] Soliman S.S.; Srinath M.D.; Señales y sistemas continuos y discretos.
 [2] Proakis, J; Manolakis, D; "Procesamiento Digital de Señales";
 [3] Sheno, B. A.; "Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design"
 [4] Oppenheim, A; Willsky, A; "Señales y Sistemas"



[5] Picón, Andoni Irizar; "Diseño de Filtros Digitales: Filtros FIR"; TECNUN, Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Navarra.

URL:

<http://www.tecnun.es/asignaturas/tratamiento%20digital/tema9.pdf>

AGRADECIMIENTOS

Se agradece especialmente el asesoramiento y motivaciones aportadas por los Ings. Rodolfo A. Cavallero, Walter J. D. Cova y el Dr. Pablo A. Ferreyra del Instituto Universitario Aeronáutico (IUA) y la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Córdoba (CUDAR). 