

Magnetostática en Volúmenes Finitos

Finite Volume Magnetostatics

Presentación: 31/10/2024

Martín Saravia

Centro de Investigación en Mecánica Teórica y Aplicada, UTN FRBB, CONICET.
msaravia@conicet.gob.ar

José Ramírez

Centro de Investigación en Mecánica Teórica y Aplicada, UTN FRBB, CONICET.
jramirez@conicet.gob.ar

Augusto Riedinger

Centro de Investigación en Mecánica Teórica y Aplicada, UTN FRBB, CONICET.
riedingeraugusto@frbb.utn.edu.ar

Resumen

Este documento presenta un análisis del Método de Volúmenes Finitos aplicado a la resolución de distribuciones discontinuas de campos magnéticos, utilizando discretizaciones espaciales basadas en mallas no estructuradas y no ortogonales. En primer lugar, se desarrolla una formulación matemática específica para abordar sistemas magnetostáticos, optimizada para manejar la complejidad inherente de las interacciones magnéticas en tales discretizaciones. La formulación es implementada en el entorno de simulación OpenFOAM, conocido por su flexibilidad y capacidad para resolver problemas complejos. Para validar el método propuesto, se realizan comparaciones detalladas con los resultados obtenidos a través de otros métodos numéricos establecidos, específicamente el método de Elementos Finitos con el software computacional COMSOL. Los resultados demuestran que el método de volúmenes finitos es eficaz en capturar las variaciones en el campo magnético, incluso en presencia de interacciones complejas entre diferentes medios. Este estudio no solo confirma la robustez y precisión del método, sino que también subraya su potencial para ser aplicado en escenarios magnéticos con geometrías complejas.

Palabras clave: Magnetostática, Método de Volúmenes Finitos, Métodos Numéricos, Simulación.

Abstract

This document presents an analysis of the Finite Volume Method applied to the resolution of discontinuous magnetic field distributions, using spatial discretizations based on unstructured and non-orthogonal meshes. First, a specific mathematical formulation is developed to address magnetostatic systems, optimized to handle the inherent complexity of magnetic interactions in such discretizations. The formulation is implemented within the OpenFOAM simulation environment, known for its flexibility and capability to solve complex problems. To validate the proposed method, detailed comparisons are made with results obtained from other established numerical methods, specifically the Finite Element Method using the COMSOL computational software. The results demonstrate that the finite volume method is effective in capturing variations in the magnetic field, even in the presence of complex interactions between different media. This study not only confirms the robustness and accuracy of the method but also highlights its potential for application in magnetic scenarios with complex geometries.

Keywords: Magnetostatics, Finite Volume Method, Numerical Methods, Simulation.

Introducción

Los campos magnéticos han sido objeto de fascinación y estudio desde su descubrimiento, y en años recientes, sus aplicaciones en ingeniería e industria han crecido de manera considerable. Este auge ha impulsado el desarrollo en el campo de la magnetostática, pero abordar las geometrías complejas que se encuentran en aplicaciones prácticas sigue siendo un desafío importante. Esto se debe a la complejidad inherente de las ecuaciones de Maxwell, las cuales describen la dinámica de los campos magnéticos (Maxwell, 1865). Para superar estos retos, se ha vuelto esencial el uso de métodos numéricos que permitan predecir con precisión el comportamiento de los campos magnéticos en dichas geometrías complejas.

Un aspecto recurrente en los diseños de ingeniería moderna es la incorporación de superficies complejas. Estas superficies se utilizan para mejorar la eficiencia aerodinámica en aeronaves y optimizar la transferencia de calor, así como en el diseño de dispositivos electromagnéticos como antenas y sistemas de comunicación (Wright, 1999; Senior, 1995). Aunque estas optimizaciones han demostrado ser efectivas, la simulación numérica de geometrías tan sofisticadas se complica debido a la no-ortogonalidad que surge al discretizar espacialmente estas superficies.

En el caso del Método de Volúmenes Finitos (FVM), se han realizado avances significativos para abordar estas complejidades, como el desarrollo de esquemas que permiten resolver ecuaciones en geometrías no ortogonales y no uniformes (Calhoun, 2010; Sabbagh-Yazdi, 2012). Sin embargo, la aplicación de FVM para resolver las ecuaciones de Maxwell en superficies curvas es un área que aún no ha sido explorada en profundidad. Este trabajo se enfoca en la evaluación de un esquema FVM que utiliza un algoritmo de corrección no ortogonal desarrollado en OpenFOAM, con el fin de encontrar soluciones precisas en las interfaces discontinuas de diferentes medios magnéticos.

Formulación magnetostática

Suponga $\mathbf{B}, \mathbf{J}^f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\mu^0 \in \mathbb{R}$, donde \mathbf{B} denota una distribución arbitraria de campo magnético, \mathbf{J}^f una distribución de corriente libre y μ^0 la permeabilidad magnética del espacio libre.

Teorema 1 (Ley de Gauss): El campo magnético es un campo sin fuentes, i.e. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (Jackson, 1999).

Teorema 2 (Ley de Ampère): Las corrientes eléctricas generan campos magnéticos dados por $\nabla \times \mathbf{B} = \mu^0 \mathbf{J}^f$ (Griffiths, 2021).

Definición 1 (Conservación de la corriente libre): La corriente libre obedece su propia ley de conservación, $\nabla \cdot \mathbf{J}^f = 0$ (Griffiths, 2021).

Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ tal que P representa un dominio permeable en el espacio. Suponga $\mathbf{B}^p, \mathbf{J}^i : P \rightarrow P$ como la distribución de campo magnético en P y la corriente inducida en P respectivamente.

Proposición 1: La distribución de campo magnético en P obedece la Ley Ampère según (Jackson, 1999)

$$\nabla \times \mathbf{B}^p = \mu^0 (\mathbf{J}^f + \mathbf{J}^i). \quad (1)$$

Asuma $\mathbf{M}^i : P \rightarrow P$ como la magnetización inducida por \mathbf{J}^i .

Definición 2 (Campo auxiliar \mathbf{H}): Se define el campo auxiliar $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^3$ como

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu^0} \mathbf{B}^p - \mathbf{M}^i. \quad (2)$$

Sea μ^r una permeabilidad relativa entre μ^0 y la permeabilidad $\mu \in \mathbb{R}$ del material en P . Defina $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\chi = \frac{\mu - \mu^0}{\mu \mu^0}. \quad (3)$$

Proposición 2: La forma expandida de la Ley de Ampère en P es la siguiente (Saravia, 2021)

$$\nabla \times \mathbf{B}^p = \mu^0 [\nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times (\chi \mathbf{B}^p)]. \quad (4)$$

Ahora, considere un medio magnetizado $M \subset \mathbb{R}^3$ tal que $M \cap P = \emptyset$.

Aserción 1: Un medio magnetizado M resulta en una corriente vinculada J^b (Jackson, 1999).

Sea $\mathbf{M} \in M$ la magnetización de un medio magnetizado y $\mathbf{B}^m : M \rightarrow M$ la distribución de campo magnético en M .

Proposición 3: La forma expandida de la Ley de Ampère en M es la siguiente (Saravia, 2021)

$$\nabla \times \mathbf{B}^m = \mu^0 \mathbf{J}^b. \quad (5)$$

Teorema 3 (Ley de Ampère combinada): La forma combinada de la Ley de Ampère en $P \cup M$ es la siguiente (Saravia, 2021)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{J}_f + \nabla \times (\chi \mathbf{B}) + \nabla \times \mathbf{M}]. \quad (6)$$

Corolario 1: La Ley de Ampère combinada se puede escribir en función de un vector potencial $\mathbf{A} : P \cup M \rightarrow P \cup M$ definido como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. La Ley de Ampère resulta (Saravia, 2021)

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{-\mu^0}{1 - \chi \mu^0} [\mathbf{J}^f + (\nabla \chi) \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \times \mathbf{M}]. \quad (7)$$

Corolario 2: Suponga $\nabla \tilde{\mathbf{A}} = (\nabla \mathbf{A} - \nabla \mathbf{A}^T)$. Existe una forma en divergencia del Corolario 1 (Saravia, 2021),

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu^0 [\mathbf{J}^f - \nabla \cdot (\chi \nabla \tilde{\mathbf{A}}) + \nabla \times \mathbf{M}]. \quad (8)$$

Aserción 2: La componente normal y el vector potencial magnético permanecen continuos a través de la interfaz entre P y M , y entre diferentes subdominios de P (Griffiths, 2021).

Teorema 4: Suponga $K^f \in P \cup M$ como una corriente superficial. La componente tangencial del campo magnético en la interfaz entre P y M y entre diferentes subdominios de P es discontinua y está dada por la siguiente expresión (Saravia, 2021)

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{A}}{\partial e^n} = \mu^0 [\mathbf{K}^f - \Delta (\chi \mathbf{B} + \mathbf{M}) \times \mathbf{e}^n], \quad (8)$$

donde $\mathbf{e}^n \in \mathbb{R}^3$ tal que $|\mathbf{e}^n| = 1$ denota un vector en la dirección normal.

Validación con experimentos numéricos

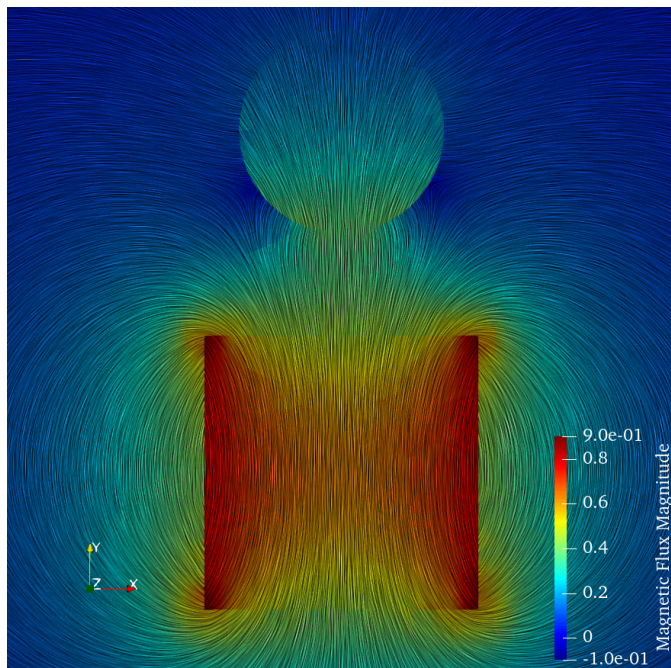
Desarrollamos diversos tests de referencia para determinar el rendimiento y la precisión de la formulación en superficies curvas. Inicialmente, evaluamos la eficacia de la formulación de Volumen Finito basada en la Ecuación 8 con condiciones de borde dadas por la Aserción 2 y el Teorema 4. La formulación fue implementada

en OpenFOAM, y comparada con un *solver* de Elementos Finitos establecido utilizando COMSOL Multiphysics. Posteriormente, evaluamos la capacidad del método para capturar distribuciones discontinuas de campo magnético en configuraciones que incluyen combinaciones de medios permeables, magnetizados permanentemente y portadores de corriente.

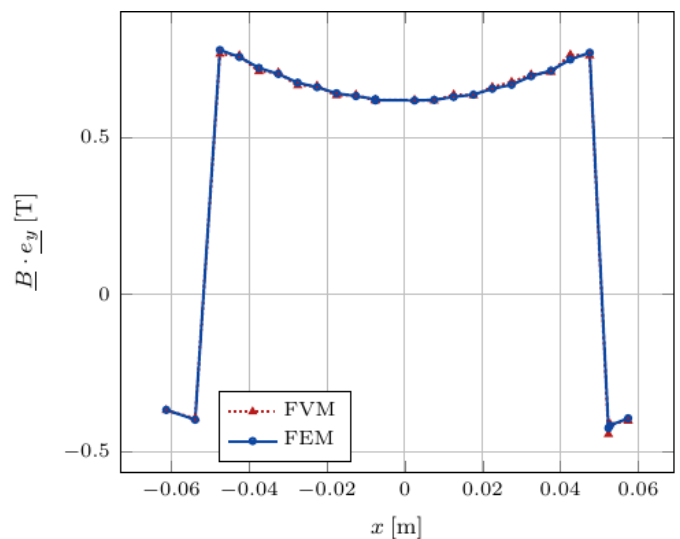
Todos los casos de prueba son pseudo-bidimensionales, y la discretización del dominio se ha realizado con mallas triangulares. Se han elegido casos bidimensionales en lugar de tridimensionales para ahorrar tiempo de computación y facilitar el proceso de mallado, ya que se ha demostrado que los resultados obtenidos con casos tridimensionales corresponden correctamente con los obtenidos con casos bidimensionales (Riedinger & Saravia, 2023). La densidad de la malla se especifica en cada caso de prueba.

Test 1 - Imán cuadrado y material permeable curvo

En la comparación inicial entre el enfoque de FVM y el solucionador establecido FEM, resolvimos una configuración con un imán cuadrado en M y un material permeable curvo en P , cuyos resultados se muestran en la Figura 1. El material permeable curvo es de diámetro $\phi = 0.075$ m y el material magnetizado permanentemente cuadrado (imán) tiene lados de longitud 0.1 m. El ferro se estableció con una permeabilidad relativa $\mu^r = 30$ y la magnetización permanente del imán se fijó en $M = 9.75 \times 10^5$ A m⁻¹ e^y, siendo e^y el versor que apunta hacia la dirección vertical. Tanto el imán como el ferro estaban inmersos en un volumen de aire de dimensiones 1 m × 1 m × 1 m. Las condiciones de contorno (BCs) se especificaron como $\mathbf{A} = 0$ tanto para el método FVM actual como para el solucionador FEM.



a. Líneas e intensidad de campo magnético.



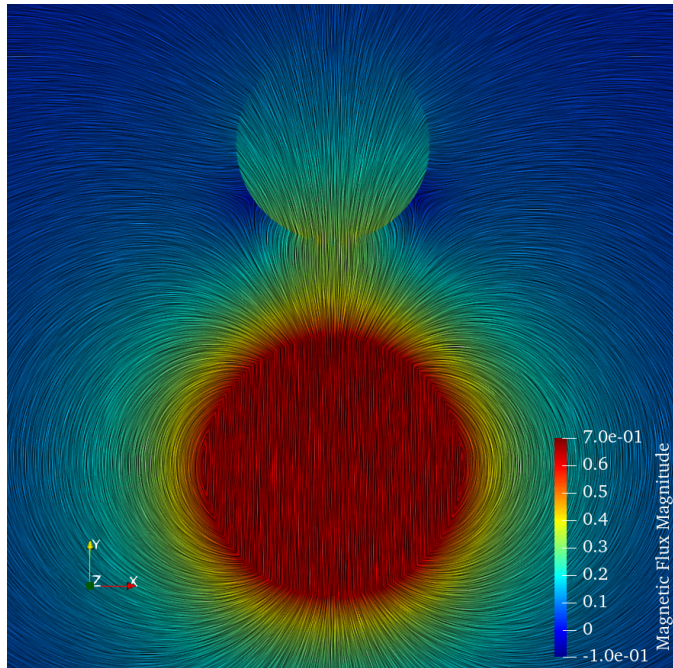
b. Comparación de valores de centro de celda en FEM y FVM.

Figura 1. Evaluación del Test 1.

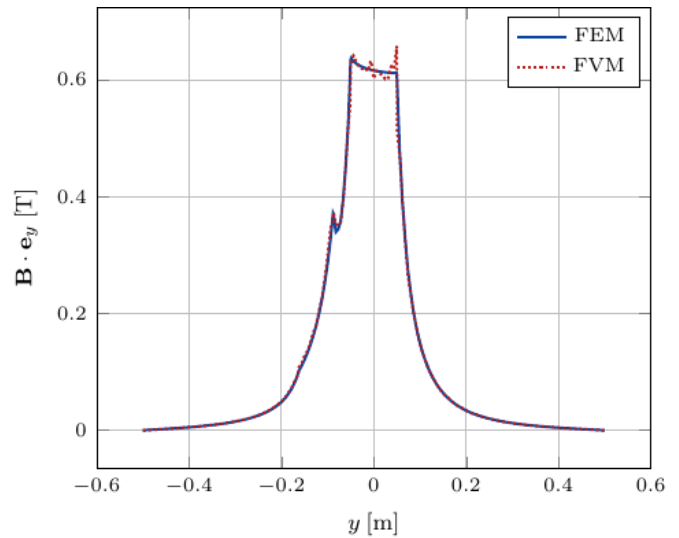
Test 2 - Imán curvo y material permeable curvo

Expandiendo la comparación inicial, probamos el método con la configuración de un dominio compuesto por un imán circular y un material permeable, con diámetros de $\phi = 0.1$ m y $\phi = 0.075$ m respectivamente. Luego, los materiales están rodeados por un volumen de aire de dimensiones 1 m × 1 m × 1 m. La malla es más fina que en el caso anterior, con una densidad basada en elementos de tamaño 1×10^{-3} m alrededor del centro del dominio, aumentando a 1×10^{-2} m en los límites.

Los resultados se observan en la Figura 2.



a. Líneas e intensidad de campo magnético.



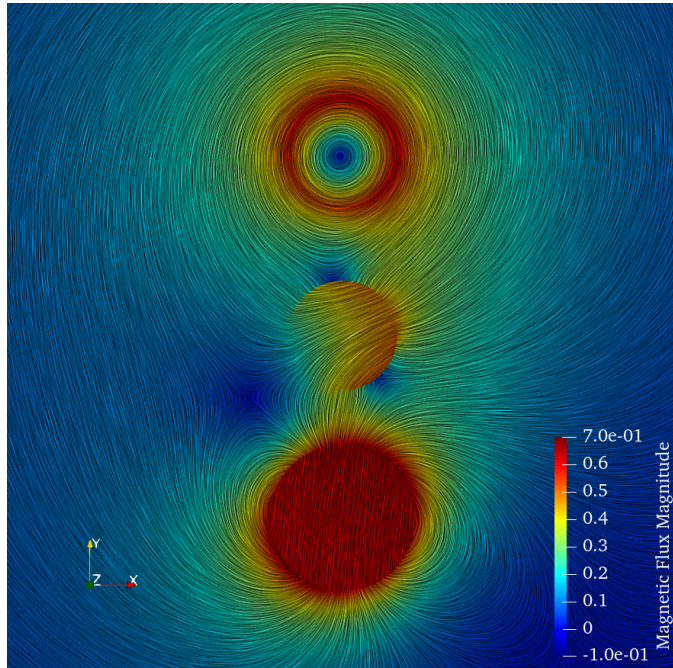
b. Comparación de valores de centro de celda en FEM y FVM.

Figura 2. Evaluación del Test 2.

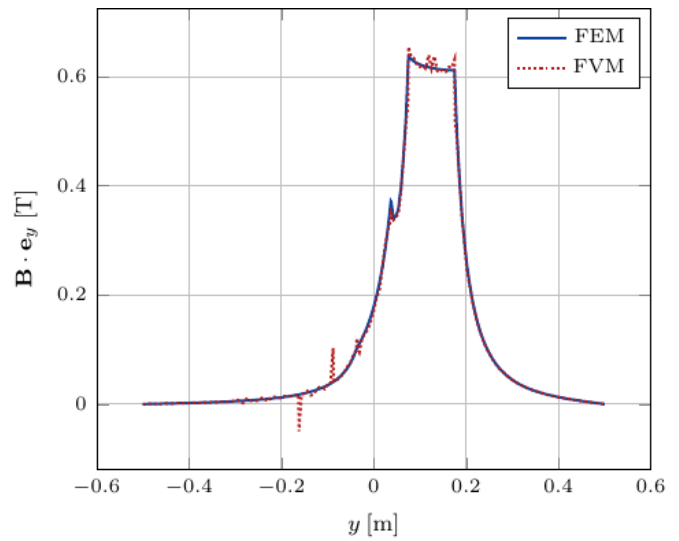
Test 3 - Imán, material permeable y corriente volumétrica

A continuación, evaluamos la precisión del método en un caso con una interacción fuerte entre tres materiales curvos. La configuración está compuesta por un imán de diámetro $\phi = 0.1 \text{ m}$ y magnetización permanente $\mathbf{M} = 9.75 \times 10^5 \text{ A m}^{-1} \mathbf{e}^y$, un material permeable de diámetro $\phi = 0.075 \text{ m}$ y permeabilidad relativa $\mu^r = 30$, y finalmente un medio portador de corriente de diámetro $\phi = 0.075 \text{ m}$ y vector de corriente $\mathbf{J} = 2.5 \times 10^7 \text{ A m}^{-2} \mathbf{e}_z$. Los tres medios están rodeados por un volumen de aire de dimensiones $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$. La densidad de la malla y las condiciones de contorno se especificaron de manera similar a la prueba anterior.

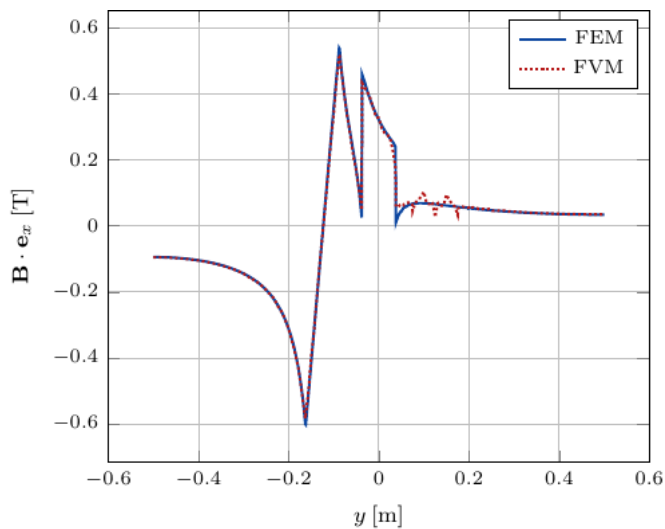
Los resultados se observan en la Figura 3.



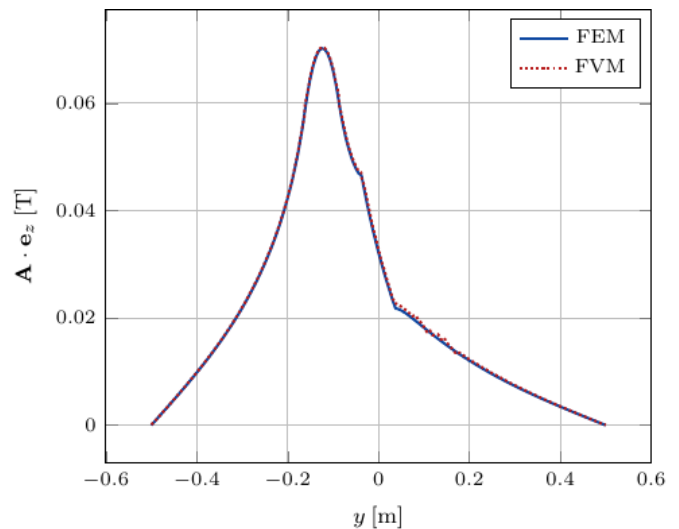
a. Líneas e intensidad de campo magnético.



b. Componente vertical del campo magnético.



c. Componente horizontal del campo magnético.



d. Componente profundidad del campo magnético.

Figura 3. Evaluación del Test 3.

Conclusiones

Presentamos un análisis de distribuciones discontinuas de densidad de flujo magnético dentro de medios curvados discretizados con mallas no ortogonales. Se ha desarrollado y probado una formulación donde la ecuación de balance se basa en el potencial vectorial magnético en diversos casos numéricos con mallas triangulares. Dado que el potencial magnético vectorial de interfaz es proporcionado por la solución en lugar de ser impuesto como una condición de contorno interna, se han desarrollado experimentos numéricos para evaluar la densidad de flujo magnético en la interfaz multimedia.

El enfoque ha demostrado ser efectivo para el cálculo de distribuciones discontinuas de campo magnético dentro de superficies curvas. Además, los requisitos de convergencia que se han encontrado son fáciles de implementar y no han mostrado un deterioro en la efectividad computacional. Por lo tanto, se concluye que usar el esquema de FVM propuesto produce resultados similares a un enfoque de FEM.

Agradecimientos

Queremos agradecer el apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas y de la Universidad Tecnológica Nacional a través del PID-ENUTIBB0007877TC.

Referencias

- Calhoun, D. A. and H., Christiane. (2010). A finite volume method for solving parabolic equations on logically cartesian curved surface meshes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(6), 4066–4099.
- Griffiths, D. J. (2021). *Introduction to Electrodynamics Fourth Edition*.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. American Association of Physics Teachers.
- Maxwell, J. C. (1865). VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155, 459–512.
- Riedinger, A., & Saravia, M. (2023). A single--region Finite Volume framework for modeling discontinuous magnetic field distributions. *Computers & Structures*, 277, 106960.
- Sabbagh-Yazdi, S., Ali-Mohammadi, S., & Pipelzadeh, M. (2012). Unstructured finite volume method for matrix free explicit solution of stress--strain fields in two dimensional problems with curved boundaries in equilibrium condition. *Applied Mathematical Modelling*, 36(5), 2224–2236.
- Saravia, M. (2021). A finite volume formulation for magnetostatics of discontinuous media within a multi-region openfoam framework. *Journal of Computational Physics*, 433, 110089.
- Senior, T. B., & Volakis, J. L. (1995). *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. Iet.
- Wright, L., & Schobeiri, M. (1999). *The effect of periodic unsteady flow on aerodynamics and heat transfer on a curved surface*.