

# Control de rotaciones del péndulo paramétrico con miras a aplicaciones en energía undimotriz

## Rotation control of the parametric pendulum with a view on wave energy applications

Presentación: xx/10/2024

### Franco Ezequiel Dotti

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca (UTN-FRBB). Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).  
fdotti@frbb.utn.edu.ar

### Sebastián Pablo Machado

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca (UTN-FRBB). Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).  
smachado@frbb.utn.edu.ar

### Resumen

Este artículo presenta los avances realizados en el Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada acerca de la aplicación de una técnica de control de rotaciones del péndulo paramétrico. Esta técnica se engloba dentro de la línea de investigación sobre convertidores undimotrices que se desarrolla en la actualidad. La acción de control consiste en un par de asistencia, que se proporciona convenientemente a una rueda de péndulo para aumentar su velocidad angular. Se presentan experimentos evidenciando que las rotaciones se pueden alcanzar y mantener por medio de esta técnica bajo un forzamiento armónico y bajo un forzamiento irregular. Esto último es de particular importancia, de cara a un posible uso en convertidores de energía de las olas, que es en esencia la aplicación de ingeniería que se persigue. Se presenta también un modelo matemático de la ley de control, el cual se introduce como una función de torque en la ecuación clásica del péndulo paramétrico. Este modelo es validado experimentalmente y empleado luego para develar un mayor universo de posibilidades de la técnica de control bajo estudio.

Palabras clave: Péndulo paramétrico, Dinámica no lineal, Convertidor undimotriz, Control no lineal

### Abstract

This paper presents advancements made by Grupo de Análisis en Multifísica Aplicada regarding the application of a rotation control technique for the parametric pendulum. This technique is part of the ongoing research line on wave energy converters. The control action consists of an assistance torque, which is appropriately applied to a pendulum wheel to increase its angular velocity. Experiments are presented, demonstrating that rotations can be achieved and sustained using this technique under both harmonic and irregular forcing. The latter is particularly significant for potential use in wave energy converters, which is the primary engineering application being pursued. A mathematical model of the control law is also introduced, introducing a torque function in the classical equation of the parametric pendulum. This model is experimentally validated and then employed to explore a broader range of possibilities for the control technique under study.

Keywords: Parametric pendulum, Nonlinear dynamics, Wave energy converter, Nonlinear control

## Introducción

Siguiendo los lineamientos del Plan Estratégico Argentina Innovadora 2020 (AI-2020) se creó en 2016 en el Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP) una línea de investigación sobre convertidores undimotrices basados en la dinámica del péndulo paramétrico. Con ello se apunta a lograr para el país un aprovechamiento eficiente de la energía del oleaje en el mediano a largo plazo. La idea del convertidor pendular es simple e intuitiva: se trata de un péndulo (en rigor, una rueda desbalanceada) ubicado sobre una plataforma flotante, a la cual el oleaje impone un movimiento predominantemente vertical. A partir del movimiento impuesto, se busca que el péndulo alcance un movimiento de rotación sobre su eje pivot. Así, un generador acoplado al eje del péndulo toma parte de la energía cinética de rotación y la convierte en eléctrica (Wiercigroch et al., 2011; Yurchenko y Alevras, 2018; Dotti y Virla, 2021). La principal ventaja de los convertidores pendulares con respecto a otras tecnologías se basa en el hecho de que, durante el proceso de captura energética, no compiten directamente contra la fuerza bruta del mar, sino que se benefician del comportamiento dinámico intrínseco del sistema mecánico (de hecho, un convertidor pendular ni siquiera requiere estar en contacto con el agua). Este resulta un aspecto clave, ya que muchas de las tecnologías que han sido probadas en ambiente real han sucumbido frente a la hostilidad que puede presentar el clima marino (Terrero González et al., 2021). Entre otras ventajas de esta tecnología, puede mencionarse también la posibilidad de construcción modular, con múltiples unidades individuales de tamaño mediano. Esto habilitaría estrategias de mantenimiento programado con consecuente necesidad de actuar contra fallos parciales, pero previniendo fallos globales.

Si bien las ventajas mencionadas (y otras no mencionadas) hacen de esta tecnología una opción atractiva, existe un aspecto en el cual los convertidores pendulares corren con desventaja: su implementación práctica resulta compleja desde el punto de vista ingenieril (Rojas et ál., 2024). Esto se debe a que el péndulo paramétrico es de naturaleza no lineal, involucrando conceptos como el de teoría del caos, y requieren de estrategias de control activo para lograr un funcionamiento óptimo. Combinando esta característica con la aleatoriedad de los procesos del oleaje, uno puede hacerse una idea de la complejidad que los ingenieros de diseño deben afrontar.

La respuesta más energética de un péndulo paramétrico es la rotación pura, esto es, sin ningún comportamiento oscilatorio (Garira y Bishop, 2003). Bajo un forzamiento senoidal simple, la rotación pura es un movimiento común en el péndulo. No obstante, puede alcanzarse sólo en rangos limitados de los parámetros de forzamiento. E incluso si estos parámetros son adecuados, las rotaciones puras coexisten con otras respuestas no rotatorias según las condiciones iniciales (Dotti et ál., 2015). Además, en el caso de una excitación irregular, la obtención de rotaciones se dificulta aún más por la variabilidad del forzamiento. Tal situación conduce a la necesidad de controlar el péndulo para obtener rotaciones.

El objetivo del control de rotaciones es desestabilizar las respuestas no rotacionales (oscilaciones, caos, reposo) y conducir las a un movimiento rotacional estable. La mayoría de las técnicas de control de rotaciones del péndulo se han basado en el método de Retroalimentación Retardada en el Tiempo (RRT, Pyragas, 1992). Varios enfoques basados en el RRT han resultado exitosos en laboratorio, logrando rotaciones a bajo costo energético (Vaziri et ál., 2014; Das y Wahi, 2016; De Paula et ál., 2017). No obstante, el RRT involucra conceptos complejos, matemáticos, computacionales y constructivos, cuyo abordaje no presenta inconvenientes en un ambiente de laboratorio, pero sí podría hacerlo en una implementación en ambiente real, donde el control debe realizarse en condiciones hostiles. Así, con el objetivo de superar estos inconvenientes, se desarrolló en el GIMAP una nueva técnica más simple que las enmarcadas en el método RRT (Dotti et ál., 2023a; Dotti et ál., 2023b), pero similar en robustez y aptitud para alcanzar rotaciones. En este artículo se remarcen los puntos clave de esta técnica de control con miras a la generación undimotriz. Se presenta el trabajo de implementación experimental realizado, con las correspondientes demostraciones de funcionamiento. Luego se describe un modelo matemático simple que permite predecir el comportamiento de la técnica de control ante diversas situaciones no factibles de contemplar en la experimentación.

## Control experimental de rotaciones del péndulo paramétrico

En esencia, la acción de control consiste en brindar a la rueda pendular un torque externo de asistencia, que se proporciona convenientemente para aumentar su velocidad angular. La decisión de aplicar o no la asistencia se basa en mediciones periódicas de la velocidad. Esto se debe a que la magnitud de la velocidad angular puede

asociarse al hecho de que el péndulo esté o no rotando. Así, en base a conclusiones sobre la dinámica, se propuso una expresión para la velocidad umbral dada por  $\dot{\theta}_C = 4\sqrt{(b\omega_0 + c)/I}$ , donde  $b$  y  $c$  son coeficientes de fricción viscosa y seca respectivamente,  $I$  es la inercia de la rueda y  $\omega_0$ , su frecuencia natural (Dotti et al., 2023a). Para velocidades por debajo de  $\dot{\theta}_C$  se asume que el péndulo no puede rotar.

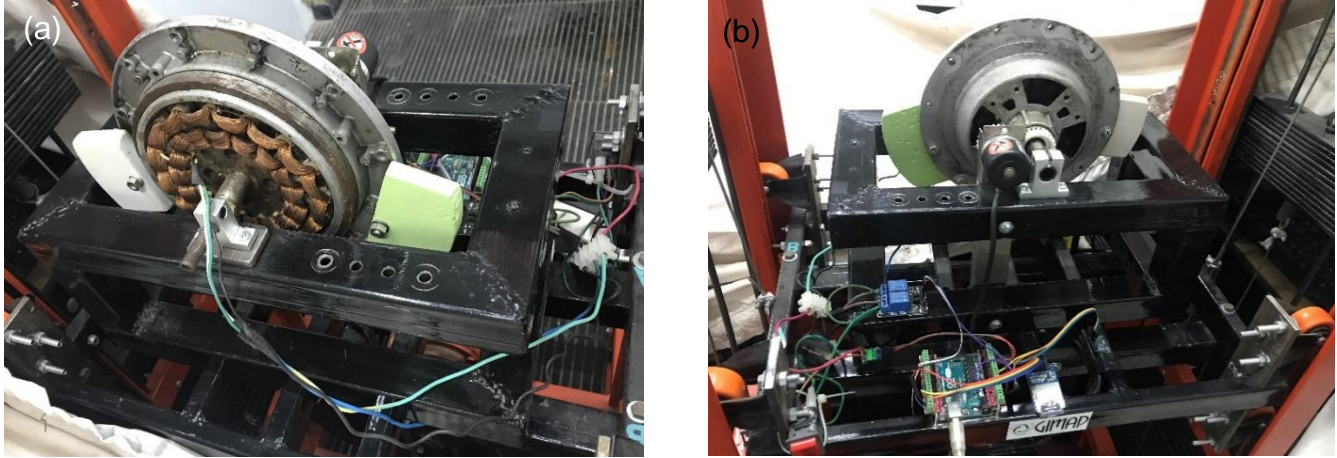


Figura 1. Dispositivo experimental para la aplicación de la ley de control de rotaciones en el laboratorio del GIMAP. (a) Vista posterior mostrando los bobinados del estator. (b) Vista frontal mostrando la electrónica.

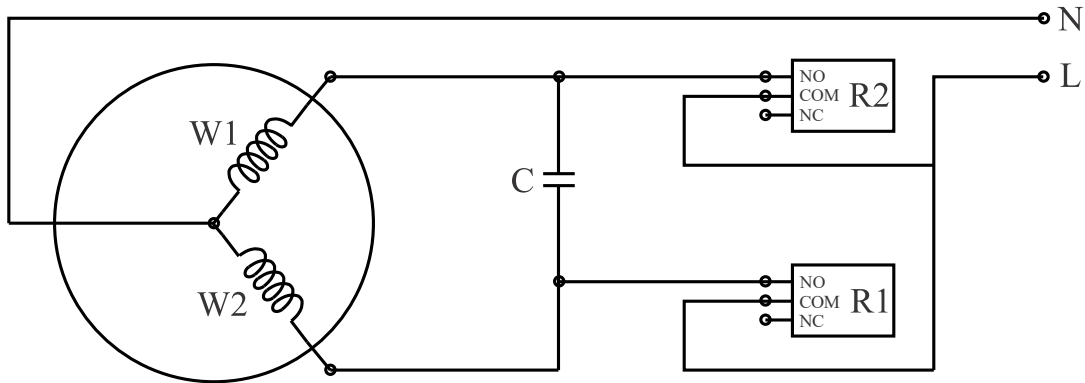


Figura 2. Diagrama del circuito de potencia para la aplicación de la acción de control.

El dispositivo experimental se muestra en la Fig. 1. Consiste en una rueda pendular montada sobre un excitador mecánico de biela-manivela, que proporciona un forzamiento recíprocante clásico (Norton, 2012). La rueda tiene dos partes concéntricas. La parte exterior es un rotor desequilibrado, mientras que la interior es un estator con dos bobinas incorporadas (Fig. 1a). Éstas generan el campo magnético para la aplicación de la acción de control, junto con los imanes fijos al rotor. Ambas bobinas se conectan en paralelo, como se muestra en la Fig. 2. El circuito LC creado produce un gran desfase entre devanados y, en consecuencia, un alto par motor en un corto período de tiempo. La activación de los relés R1 y R2 regula la dirección del par motor aplicado.

La ley de control propiamente dicha está dada por

$$\Delta t_a = \begin{cases} t_{\max} - \frac{t_{\max} - t_{\min}}{\dot{\theta}_C} |\dot{\theta}| & \text{si } |\dot{\theta}| \leq \dot{\theta}_C \\ 0 & \text{si } |\dot{\theta}| \geq \dot{\theta}_C \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\Delta t_a$  es el intervalo de tiempo del paso de la corriente a través del circuito, mientras que  $t_{\max}$  y  $t_{\min}$  son el tiempo máximo y mínimo permitido para el paso de la corriente, respectivamente (ver Dotti et ál., 2023a).

En múltiples experimentos, con diferentes condiciones de forzamiento armónico, se obtuvieron rotaciones en todos los casos en los que  $\dot{\theta}_C$  se estima con la fórmula dada. No obstante, en muchos casos también se lograron

rotaciones con valores de  $\dot{\theta}_C$  algo menores. La Fig. 3 muestra dos ejemplos de aplicación del control, bajo la condición de forzamiento denominada  $S_1$  (amplitud de  $r = 0.075$  m y frecuencia de  $\Omega = 1.193$  s<sup>-1</sup>). En la Fig. 3a, se logra una rotación desde el reposo con tres ayudas de torque, el cual resulta el escenario más común en los ensayos. Sin embargo, la rotación se obtiene a veces con dos o cuatro ayudas, debido a que la posición inicial de la mesa vibratoria puede ser diferente en cada ensayo, y el control es independiente de forzamiento. En la Fig. 3b, se alcanza una rotación a partir de un movimiento oscilatorio. En experimentos de este tipo, la rotación se logra principalmente con solo dos ayudas de torque. Se requiere menos energía suministrada al sistema en este segundo caso ya que el movimiento oscilatorio inicialmente tiene más energía que la posición de reposo.

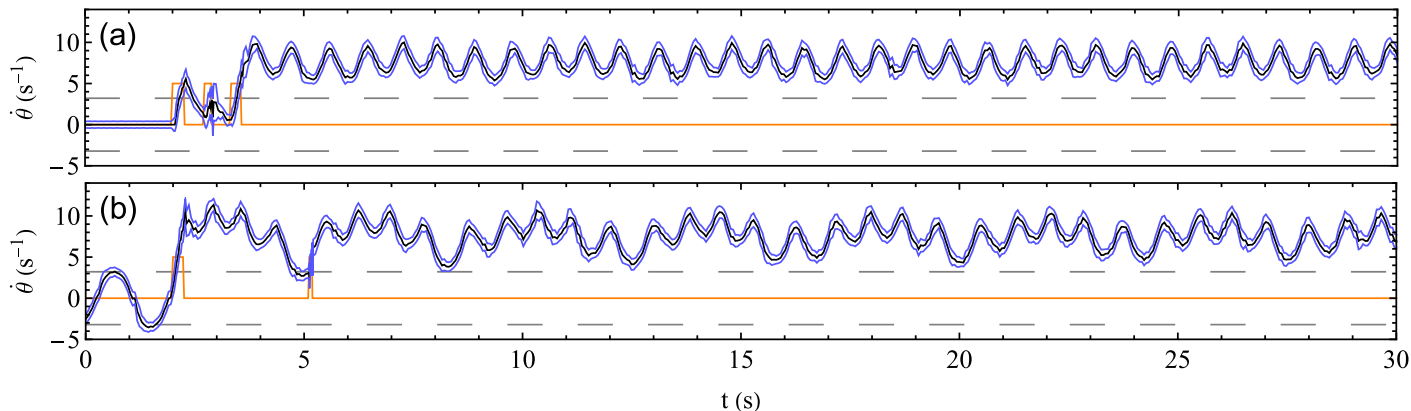


Figura 3. Dos resultados experimentales típicos de la acción de control. Se muestra la velocidad angular de la rueda pendular (-), la señal de control (-) y la velocidad umbral (-). (a) Partiendo desde el reposo. (b) Partiendo desde una oscilación.

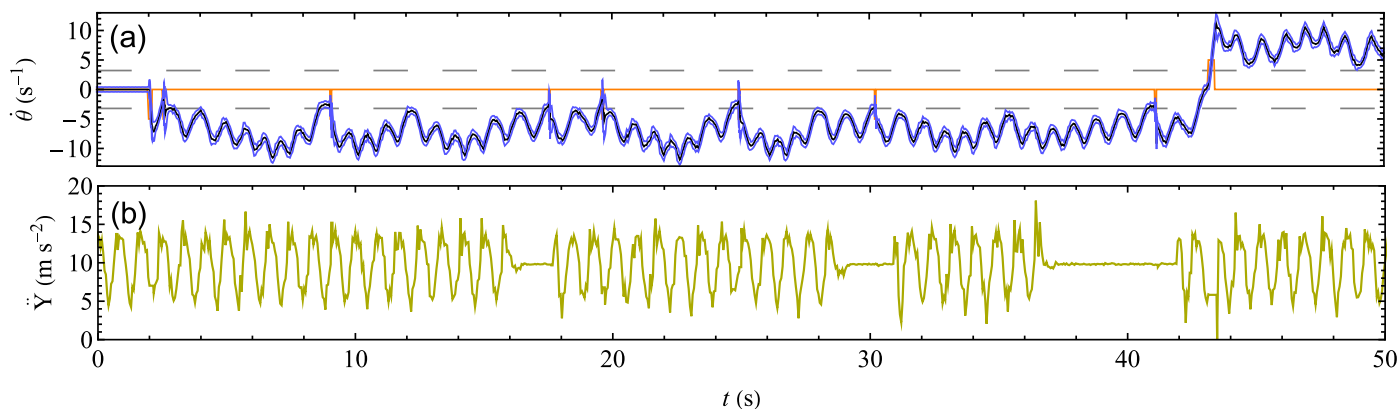


Figura 4. Resultado experimental del control bajo forzamiento irregular. (a) Velocidad angular de la rueda pendular (-), señal de control (-) y velocidad umbral (-). (b) Aceleración vertical externa impuesta por la máquina excitadora.

Se llevaron a cabo experimentos para estudiar el comportamiento del sistema de control bajo excitación irregular. Para ello, el forzamiento externo se interrumpió temporalmente durante los experimentos, y se reanudó después de un retardo de tiempo aleatorio. El control mostró un buen desempeño, siendo capaz de mantener y/o recuperar la rotación cuando fue necesario. Un ejemplo en el que la excitación se detuvo y se reanudó tres veces se muestra en la Fig. 4. Allí la velocidad angular del péndulo se perturba durante las detenciones, especialmente en la última (de 36.5 s a 42 s), donde se pierde la rotación y luego se recupera por la acción de control. La forma en que se recuperan las rotaciones en este ejemplo es una indicación de que la ley de control podría funcionar adecuadamente bajo un forzamiento estocástico como el del oleaje.

## Modelización matemático-computacional

Su propósito modelar la dinámica del péndulo paramétrico junto a la acción de control propuesta mediante la ecuación gobernante (Dotti et al, 2023b)



$$\ddot{\theta} + \frac{b}{I}\dot{\theta} + \frac{c}{I}\text{sgn}\dot{\theta} + \omega_0^2\left(\frac{\ddot{y}}{g} + 1\right)\sin\theta = T \quad (2)$$

donde  $g$ , la aceleración de la gravedad y  $\theta$  es la posición angular del péndulo medida desde la vertical inferior ( $\theta = 0$  corresponde al reposo), tomada positiva en la dirección antihoraria y negativa en la horaria. El forzamiento viene dado por el desplazamiento vertical  $y(t)$  del punto pivot. El torque de control se asume como  $T(t, \dot{\theta}) = -\kappa \Delta t_a \varphi \text{sgn} \dot{\theta}$ , esto es, proporcional al intervalo de tiempo  $\Delta t_a$  durante el cual se produce la acción, y a una función de activación sigmoidal  $\varphi(t, \dot{\theta})$ . El chequeo de la velocidad y la comparación con  $\dot{\theta}_c$  para la evaluación de (1) se realiza de forma discreta, cada un intervalo de tiempo establecido *a priori*.

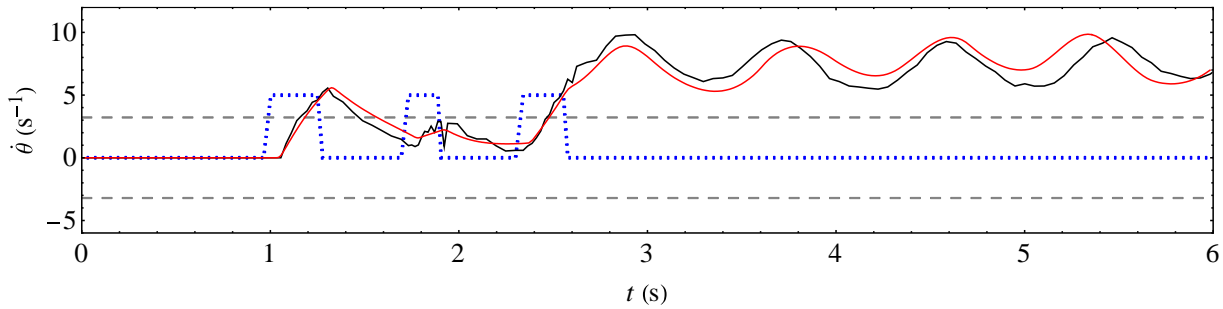


Figura 5. Comparación entre respuestas simulada (—) y experimental (—), obteniendo rotación desde el reposo. Se indica la acción de control experimental (....) y la velocidad umbral (---).

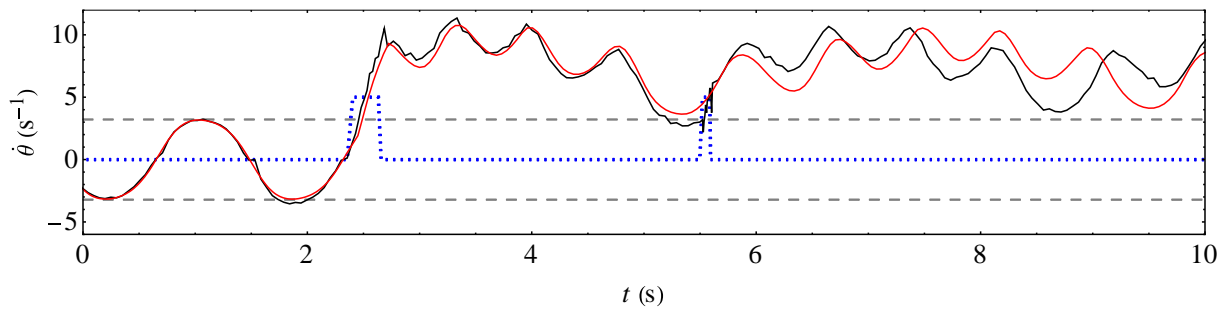


Figura 6. Comparación entre respuestas simulada (—) y experimental (—), obteniendo rotación desde movimiento oscilatorio. Se indica la acción de control experimental (....) y la velocidad umbral (---).

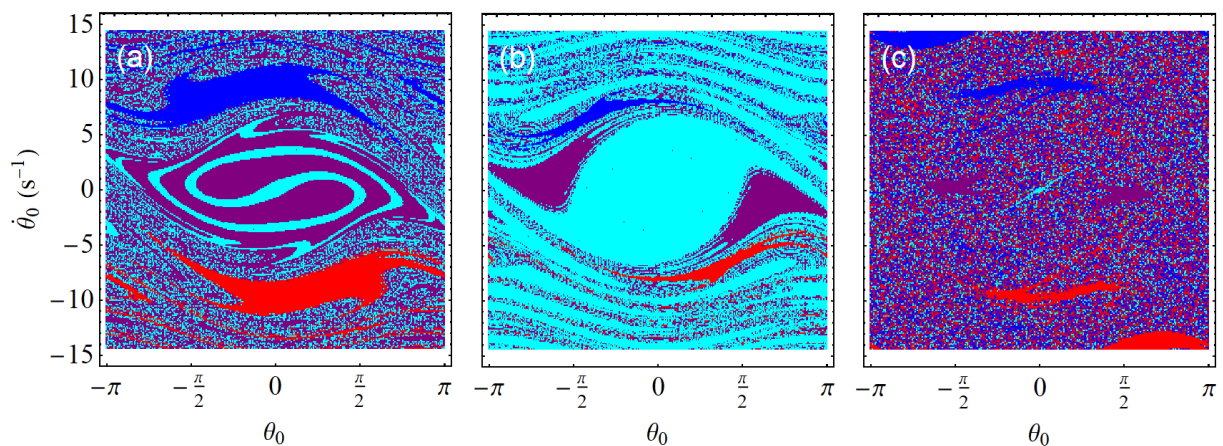


Figura 7. Cuencas de atracción simuladas para el sistema no controlado, donde (•): rotación antihoraria, (•): rotación horaria, (•): oscilación y (•): posición de reposo. Escenarios de forzamiento: (a)  $S_1$ , (b)  $S_2$  y (c)  $S_3$ .

Las Fig. 5 y 6 muestran dos verificaciones experimentales del modelo (2), asociadas a los casos presentados en la Fig. 3. En el caso de la Fig. 5 se alcanza una rotación antihoraria partiendo de la posición de reposo. La rotación se obtiene luego de tres ayudas tanto en el experimento como en la simulación. Se observa que la respuesta

simulada pierde algo menos energía que la experimental inmediatamente después de las ayudas. Esto se atribuye a diferentes fuentes de error, como las estimaciones de los factores de fricción, inercia y frecuencia natural entre otros. No obstante, el ajuste del modelo es más que aceptable en términos prácticos.

En la Fig. 6 se alcanza una rotación antihoraria partiendo desde una oscilación. En este caso, la rotación experimental se logra luego de dos ayudas mientras que la simulación prevé una única ayuda. El ajuste del modelo es muy satisfactorio, especialmente hasta instantes antes de la segunda ayuda. Allí, por un pequeño margen, el chequeo de velocidad produce  $\dot{\theta} < \dot{\theta}_C$  en el experimento y  $\dot{\theta} > \dot{\theta}_C$  en la simulación (corresponde a los límites de error del experimento según Dotti et al., 2023a). De (1), esto produce  $\Delta t_a = 0$  en la simulación, indicando que no debe actuar el control. No obstante, aunque levemente desfasado, se alcanza el movimiento rotatorio de una forma muy similar, resultando también aceptable la simulación en términos prácticos.

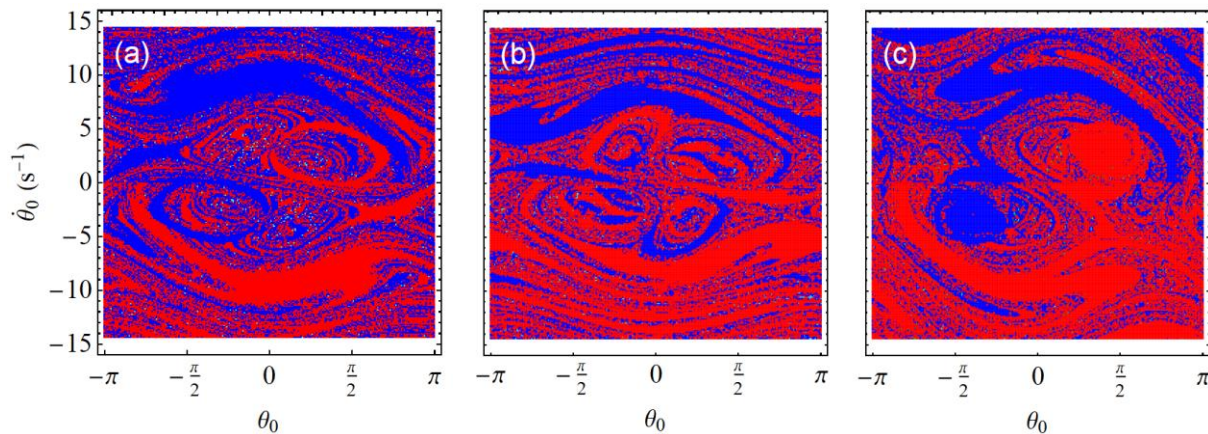


Figura 8. Cuencas de atracción simuladas para el sistema controlado, donde (•): rotación antihoraria, (•): rotación horaria, (•): oscilación y (•): posición de reposo. Escenarios de forzamiento: (a)  $S_1$ , (b)  $S_2$  y (c)  $S_3$ .

Una vez verificado el modelo, se realizaron simulaciones con el objeto de cuantificar la influencia de la ley de control propuesta en la dinámica original del sistema. Las simulaciones se presentan en términos de cuencas de atracción. Éstas constituyen mapas de colores indicadores de la respuesta estacionaria que se obtiene del sistema para diferentes condiciones iniciales. Se presentan tres escenarios de forzamiento correspondientes a situaciones posibles del sistema de ensayo de la Fig. 1. Estos son el ya descrito  $S_1$  ( $r = 0.075$  m y  $\Omega = 1.193$  s<sup>-1</sup>), el escenario  $S_2$ , con  $r = 0.075$  m y  $\Omega = 0.832$  s<sup>-1</sup> y el  $S_3$ , con  $r = 0.205$  m y  $\Omega = 1.193$  s<sup>-1</sup>. La Fig. 7 muestra las cuencas correspondientes a la dinámica original ( $T = 0$ ). La Fig. 8 corresponde a idénticas condiciones de la Fig. 7, pero incluyendo en este caso la acción de control. Al comparar ambas figuras se observa que la mayoría de las respuestas originalmente oscilatorias y de reposo mutan a respuestas rotatorias debido a la acción del control.

## Conclusiones

Se presenta y prueba experimentalmente una ley de control basada en la velocidad, cuyo objetivo es obtener rotaciones estables del péndulo paramétrico. Esta técnica de control es más sencilla, tanto teórica como constructivamente, que las basadas en el comúnmente usado método de Retroalimentación Retardada en el Tiempo. Sin embargo, se demuestra puede producir resultados similares en términos de eficiencia y robustez, logrando rotaciones experimentales a partir de movimientos no rotatorios bajo forzamiento armónico. Además, se muestra que el control propuesto recupera las rotaciones con relativa facilidad bajo un forzamiento irregular. Esto es razonable, ya que la acción de control no depende del forzamiento externo. Tal característica indica que la ley de control podría adecuarse a un forzamiento estocástico como las olas del océano.

Se presentó además un modelo matemático de la ley de control, cuyo acuerdo con los experimentos resultó aceptable desde el punto de vista práctico. Las simulaciones computacionales realizadas predijeron que la ley de control sería capaz de obtener rotaciones en más del 96% de las situaciones analizadas.

Se requiere más investigación para lograr una implementación óptima, en términos de alcanzar rotaciones y minimizar el consumo de energía. Para ello, podría requerirse una técnica de estimación más sofisticada de los parámetros arbitrarios, incluyendo una actualización en tiempo real. El uso de mediciones de aceleración

externa como entrada en la ley de control también podría ser importante para una aplicación optimizada del control, especialmente para la excitación estocástica.

## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional, el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

## Referencias

- Das, S., & Wahi, P. (2016). Initiation and directional control of period-1 rotation for a parametric pendulum. *Proceedings of the Royal Society A*, 472, 20160719. <https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0719>
- De Paula, A., Savi, M., Vaziri, V., Pavlovskaja, E., & Wiercigroch, M. (2017). Experimental bifurcation control of a parametric pendulum. *Journal of Vibration and Control*, 23(14), 2256–2268. <https://doi.org/10.1177/1077546315617069>
- Dotti, F., Luna, S., Oxarango, L., Virla, J., & Rojas, L. (2023a). Experimental rotation control of the parametric pendulum using a velocity approach. *Mechanics Research Communications*, 129, 104085. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2023.104085>
- Dotti, F., Luna, S., Oxarango, L., Rojas, L., & Virla, J. (2023b). Control de rotaciones del péndulo paramétrico basado en la velocidad. *Mecánica Computacional*, 40, 1127-1136.
- Dotti, F., Reguera, F., & Machado, S. (2015). A review on the nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting from ocean waves. In *Proceedings of the 1st PANACM* (pp. 1516-1529), Buenos Aires, Argentina.
- Dotti, F., & Virla, J. (2021). Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 16(6), 061007. <https://doi.org/10.1115/1.4049756>
- Garira, W., & Bishop, S. R. (2003). Rotating solutions of the parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 263, 233-239. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01176-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01176-5)
- Norton, R. L. (2012). *Diseño de maquinaria: Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos* (5ª ed.). McGraw-Hill.
- Pyragas, K. (1992). Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 170, 421–428. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)90745-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90745-8)
- Rojas, L., Dotti, F., Battaglia, L. & Storti, M. (2024). Simulación de un convertidor undimotriz de péndulo paramétrico con miras a su implementación en el estuario de Bahía Blanca. *Mecánica Computacional*, 41, aceptado para su publicación.
- Terrero González, A., Dunning, P., Howard, I., McKee, K., & Wiercigroch, M. (2021). Is wave energy untapped potential? *International Journal of Mechanical Sciences*, 205, 106544. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106544>
- Vaziri, V., Najdecka, A., & Wiercigroch, M. (2014). Experimental control for initiating and maintaining rotation of parametric pendulum. *The European Physical Journal Special Topics*, 223, 795–812. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2014-02170-3>
- Wiercigroch, M., Najdecka, A., & Vaziri, V. (2011). Nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting. In *Vibration Problems ICOVP 2011: The 10th International Conference on Vibration Problems* (pp. 35-42). Springer Proceedings in Physics, 139. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2069-5\\_5](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2069-5_5)
- Yurchenko, D., & Alevras, P. (2018). Parametric pendulum-based wave energy converter. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 99, 504–515. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.06.017>