

Acoplamiento de péndulos de masas múltiples y fenómeno de sincronización

Multi-mass pendulum coupling and the synchronization phenomenon

Presentación: 08/10/2024

Doctorando:

Juan Nicolás VIRLA

Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP), Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina
jnvirla@frbb.utn.edu.ar

Director:

Franco Ezequiel DOTTI

Codirector:

Sebastián Pablo MACHADO

Resumen

En este trabajo se estudia la sincronización en péndulos de masas múltiples montados sobre estructuras elásticas, y forzados periódicamente. Mediante simulaciones numéricas, se identificó la sincronización en anti-fase como la más eficiente para esta distribución del dispositivo, ya que minimiza la transferencia de energía hacia la estructura de soporte, maximizando así el potencial de conversión energética. Este enfoque abre nuevas posibilidades para optimizar dispositivos unidimotrices, reduciendo la necesidad de controles externos complejos y eventualmente mejorando la estabilidad de las respuestas bajo condiciones de forzamiento no periódico.

Palabras clave: Péndulo paramétrico, Energía unidimotriz, Dinámica no lineal, Sincronización

Abstract

In this work, synchronization is studied in multi-mass pendulums mounted on a periodically forced elastic structure. Through numerical simulations, anti-phase synchronization was identified as the most efficient for this device distribution, since it minimizes the energy transfer to the supporting structure, thus maximizing the energy conversion potential. This approach opens new possibilities for optimizing wave-driven devices, reducing the need for complex external controls and eventually improving the stability of the responses under non-periodic forcing conditions.

Keywords: Parametric pendulum, Wave energy, Non-linear dynamics, Synchronization

Introducción

Uno de los dispositivos más simples capaces de desarrollar movimientos armónicos es el péndulo paramétrico (Squire,1986). Su fácil construcción permite realizar numerosos ensayos para validar modelos matemáticos. Estos péndulos tienen soluciones analíticas para oscilaciones de baja amplitud y, mediante métodos numéricos, se pueden estudiar fenómenos no lineales en amplitudes mayores (Clifford & Bishop,1995; Lenci,2012). Son de especial interés las respuestas rotantes y caóticas que aparecen bajo ciertas condiciones de forzamiento.

En los últimos años, el péndulo paramétrico ha sido considerado como una posibilidad tecnológica seria para la extracción de energía ambiental (Yurchenko & Alevras, 2018; Kumar et. Al., 2019; Dotti & Virla, 2021). Resulta especialmente atractiva su aplicabilidad como convertidor del oleaje marino, siendo este un recurso con un potencial en el orden de 1 TW solamente considerando las costas del mundo (Falnes, 2007). Las respuestas rotantes de los péndulos son ventajosas respecto a otras como las oscilaciones o el caos, al presentar mayor energía cinética promedio y minimizar la necesidad de acondicionar la señal eléctrica para las redes, proporcionando una salida periódica dependiente solo de la velocidad angular del péndulo acoplado al generador eléctrico.

Como las soluciones rotantes coexisten con oscilaciones y caos bajo la mayoría de los forzamientos, se han realizado estudios para controlar las respuestas de los péndulos (de Paula et. Al., 2012; Das & Wahi, 2017; Dotti et. Al., 2023), buscando acciones correctivas que induzcan la rotación. Esto se basa en la coexistencia de las repuestas, claramente apreciable en las cuencas de atracción de los péndulos con forzamientos periódicos fijos, dependiendo estas de las condiciones iniciales de posición $\theta(t)$ y velocidad $\dot{\theta}(t)$ del péndulo (Dotti, 2021).

Para reducir la necesidad de acciones de control, se propone aprovechar el fenómeno de sincronización entre péndulos. Este fenómeno ocurre cuando distintos osciladores intercambian energía mediante elementos que actúan como acoplamiento entre ellos. Najdecka demostró que la combinación de sincronización con una acción de control permite mejorar la obtención de rotaciones incluso con acciones de control débiles (Najdecka et. Al., 2011).

En este trabajo se estudia el efecto de la sincronización sin acción de control, forzando dos péndulos montados sobre una estructura elástica con un forzamiento periódico capaz de producir rotaciones. Se analizan las sincronizaciones en fase y contrafase, siendo esta última la más deseable para esta configuración de péndulos (Najdecka et. Al., 2011)..

Modelo matemático

El sistema en estudio consta de dos péndulos de masas múltiples, denominados α y β , y montados sobre una estructura con propiedades elásticas y de absorción de energía. La estructura, mostrada en la [Figura 1](#), está montada sobre una plataforma móvil que le impone un forzamiento periódico.

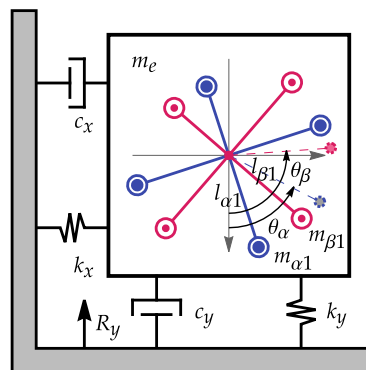


Figura 1: Modelo de dos péndulos montados sobre una estructura elástica con forzamiento periódico externo.

Las ecuaciones de movimiento se obtuvieron al aplicar la formulación de Lagrange, considerando el desplazamiento de cada péndulo referido a su centro de masa. Para $n_{\alpha} = n_{\beta} = 4$ las ecuaciones de energía tienen la forma

$$V = g(M_{\alpha}h_{\alpha c} + M_{\beta}h_{\beta c}) + \frac{1}{2} [k_x x^2 + k_y (y - R_y)^2],$$

$$T = \frac{1}{2} \left[M_e (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + M_{\alpha} \left((\dot{x} + \dot{\theta}_{\alpha} l_{\alpha c} \cos \theta_{\alpha})^2 + (\dot{y} + \dot{\theta}_{\alpha} l_{\alpha c} \sin \theta_{\alpha})^2 \right) + M_{\beta} \left((\dot{x} + \dot{\theta}_{\beta} l_{\beta c} \cos \theta_{\beta})^2 + (\dot{y} + \dot{\theta}_{\beta} l_{\beta c} \sin \theta_{\beta})^2 \right) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} m_{\alpha i} v_{\alpha i}^2 + \sum_{i=1}^{n_{\beta}} m_{\beta i} v_{\beta i}^2 \right],$$

$$P = \frac{1}{2} [c_x \dot{x}^2 + c_y (\dot{y} - \dot{R}_y)^2 + c_{\alpha} l_{\alpha c}^2 \dot{\theta}_{\alpha}^2 + c_{\beta} l_{\beta c}^2 \dot{\theta}_{\beta}^2].$$

Donde M_α y M_β son las masas totales de los péndulos, M_e es la masa de la estructura, $h_{\alpha c}$ y $h_{\beta c}$ son las alturas de los centros de masa medidas desde su posición de reposo, y $l_{\alpha c}$ y $l_{\beta c}$ son las longitudes de brazo de los centros de masa. Los parámetros k_x , k_y , c_x y c_y describen la elasticidad y amortiguamiento de la estructura, mientras que c_α y c_β corresponden a los amortiguamientos viscosos de cada péndulo. Las masas y longitudes de los elementos que conforman a α y β se definen como $m_{\alpha i}$ y $l_{\alpha i}$ respectivamente. Los ángulos $\theta_\alpha(t)$ y $\theta_\beta(t)$ mostrados en la [Figura 1](#), son medidos respecto a la dirección vertical hacia abajo, $x(t)$ e $y(t)$ son los desplazamientos de la estructura, y R_y es el forzamiento externo impuesto sobre la plataforma.

El desarrollo de Lagrange resulta en un sistema de ecuaciones con cuatro grados de libertad, al cual se le asigna $m_{\alpha 2} = m_{\alpha 4}$, $l_{\alpha 2} = l_{\alpha 4}$ y $m_{\alpha 3} < m_{\alpha 1}$, combinación que asegura que $\phi_\alpha = 0$. Lo mismo se adopta para β , con lo que las ecuaciones de movimiento obtenidas son

$$M_t \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x + C_{\alpha 1} (\ddot{\theta}_\alpha \cos \theta_\alpha - \dot{\theta}_\alpha^2 \sin \theta_\alpha) + C_{\beta 1} (\ddot{\theta}_\beta \cos \theta_\beta - \dot{\theta}_\beta^2 \sin \theta_\beta) = 0,$$

$$M_t \ddot{y} + c_y (-H \Omega \sin(\Omega t) + \dot{y}) + k_y (H \cos(\Omega t) + y) + C_{\alpha 1} (\ddot{\theta}_\alpha \sin \theta_\alpha + \dot{\theta}_\alpha^2 \cos \theta_\alpha) + C_{\beta 1} (\ddot{\theta}_\beta \sin \theta_\beta + \dot{\theta}_\beta^2 \cos \theta_\beta) = 0,$$

$$I_{o\alpha} \ddot{\theta}_\alpha + c_\alpha \left(\frac{C_{\alpha 1}}{M_\alpha} \right)^2 \dot{\theta}_\alpha + b_\alpha \operatorname{sgn} \dot{\theta}_\alpha + C_{\alpha 1} \cos \theta_\alpha \ddot{x} + C_{\alpha 1} \sin \theta_\alpha (g + \ddot{y}) = 0,$$

$$I_{o\beta} \ddot{\theta}_\beta + c_\beta \left(\frac{C_{\beta 1}}{M_\beta} \right)^2 \dot{\theta}_\beta + b_\beta \operatorname{sgn} \dot{\theta}_\beta + C_{\beta 1} \cos \theta_\beta \ddot{x} + C_{\beta 1} \sin \theta_\beta (g + \ddot{y}) = 0,$$

donde $C_{\alpha 1} = l_{\alpha 1} m_{\alpha 1} - l_{\alpha 3} m_{\alpha 3}$, $C_{\beta 1} = l_{\beta 1} m_{\beta 1} - l_{\beta 3} m_{\beta 3}$, $I_{o\alpha} = \sum_{i=1}^{n_\alpha} l_{\alpha o}^2 m_{\alpha i}$ y $I_{o\beta} = \sum_{i=1}^{n_\beta} l_{\beta o}^2 m_{\beta i}$. Se implementan también los torques de amortiguamiento seco $\tau_\alpha = -b_\alpha \operatorname{sgn} \dot{\theta}_\alpha$ y $\tau_\beta = -b_\beta \operatorname{sgn} \dot{\theta}_\beta$. El acoplamiento entre péndulos ocurre a través de las variables x y y , dado que no existen términos de un péndulo en la ecuación del otro. Estas ecuaciones se pueden resolver numéricamente, posibilitando el estudio de distintas condiciones de forzamiento y la existencia del fenómeno de sincronización entre péndulos.

En el estudio, se consideran dos péndulos iguales con masas de $(61,13.3,23.7,13.3)10^{-3}$ kg, y longitudes de brazo de $(85,85,65,85)10^{-3}$ m, cumpliendo los requisitos para obtener $\phi_\alpha = \phi_\beta = 0$. Estos valores se eligieron con base en un estudio experimental previo, para el cual ya se determinaron los parámetros de funcionamiento del sistema. Los coeficientes de amortiguamiento de este sistema son $c_\alpha = c_\beta = 64548 \text{ gmm}^2/\text{s}$ y $b_\alpha = b_\beta = 254265 \text{ gmm}^2/\text{s}^2$, y se consideraron valores $k_x = k_y = 903 \text{ N/m}$ y $c_x = c_y = 10^4 c_\alpha$, los cuales se obtuvieron mediante métodos de elementos finitos sobre la estructura de soporte.

Los estudios experimentales mostraron que la rigidez del sistema era tal que la estructura de soporte no presentaba desplazamiento respecto al forzamiento externo. Tomando $y(t) = R_y(t)$, se eliminó un grado de libertad, resultando en las siguientes ecuaciones de movimiento

$$M_t \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x + C_{\alpha 1} (\ddot{\theta}_\alpha \cos \theta_\alpha - \dot{\theta}_\alpha^2 \sin \theta_\alpha) + C_{\beta 1} (\ddot{\theta}_\beta \cos \theta_\beta - \dot{\theta}_\beta^2 \sin \theta_\beta) = 0,$$

$$I_{o\alpha} \ddot{\theta}_\alpha + c_\alpha \left(\frac{C_{\alpha 1}}{M_\alpha} \right)^2 \dot{\theta}_\alpha + b_\alpha \operatorname{sgn} \dot{\theta}_\alpha + C_{\alpha 1} [\cos \theta_\alpha \ddot{x} + \sin \theta_\alpha (g - H \Omega^2 \cos(\Omega t))] = 0,$$

$$I_{o\beta} \ddot{\theta}_\beta + c_\beta \left(\frac{C_{\beta 1}}{M_\beta} \right)^2 \dot{\theta}_\beta + b_\beta \operatorname{sgn} \dot{\theta}_\beta + C_{\beta 1} [\cos \theta_\beta \ddot{x} + \sin \theta_\beta (g - H \Omega^2 \cos(\Omega t))] = 0.$$

La presencia de sincronización puede ser determinada mediante el cálculo de $z_1 = \theta_\alpha + \theta_\beta$ y $z_2 = \theta_\alpha - \theta_\beta$, correspondientes a la sincronización en fase y contrafase respectivamente. En el estado estacionario, son de interés las respuestas tales que $z_1 = 0$ o $z_2 = 0$, lo cual corresponde a sincronizaciones con bloqueo de fase. Existen otros tipos de sincronizaciones en los que la fase no es fija, pero no son de interés en este estudio.

Resultados

Se realizaron estudios sobre diversas configuraciones de forzamiento y condiciones iniciales tanto para los péndulos como para la estructura de soporte, observándose respuestas que evidencian el fenómeno de sincronización. En la [Figura 2](#), se muestra una solución en la que los péndulos rotan en anti-fase, lo que se manifiesta en el valor de $z_1 = 0$ para la solución estacionaria. Esta configuración resulta en oscilaciones despreciables de la estructura, lo que se verifica con $x(t) \approx 0$ en el estado estacionario.

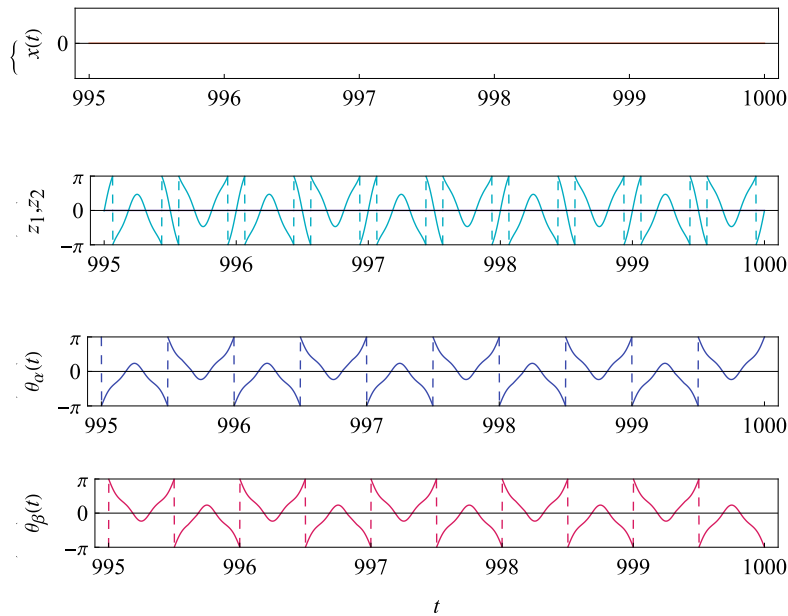


Figura 2: Respuesta temporal en estado estacionario para péndulos sincronizados en anti-fase con $H = 285 \text{ mm}$ y $\Omega = 4\pi \text{ Hz}$. Los péndulos muestran rotaciones degeneradas bajo las condiciones iniciales $\theta_{\alpha 0} = -\theta_{\beta 0} = -\frac{\pi}{3}$, $\theta'_{\alpha 0} = -\theta'_{\beta 0} = 16$ y $x_{\alpha 0} = x_{\beta 0} = 0$.

El análisis del espacio de fase para ambos péndulos permite clasificar el tipo de sincronización existente. Para las condiciones planteadas, ambos péndulos alcanzan suficiente energía para realizar una revolución completa, desacelerándose al pasar por la posición de equilibrio para cambiar de dirección. La sincronización en anti-fase provoca que las fuerzas horizontales se cancelen mutuamente, reduciendo significativamente las oscilaciones horizontales de la estructura.

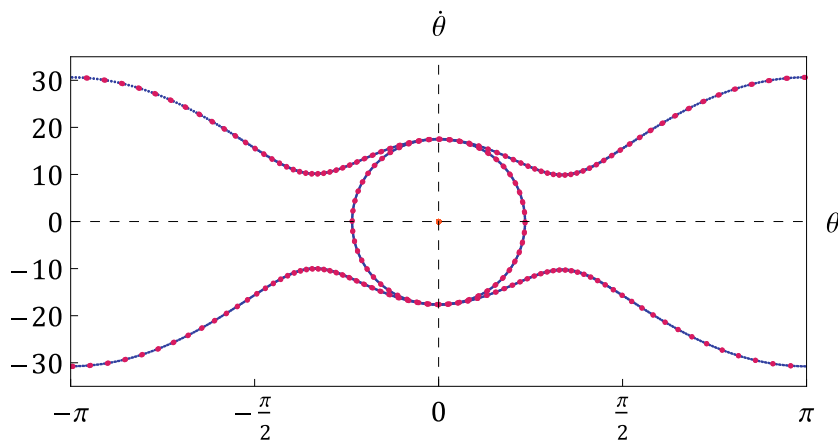


Figura 3: Espacio de fase para dos péndulos sincronizados en anti-fase con respuestas de tipo rotación-rotación. El movimiento del péndulo α se muestra en azul, el del péndulo β en rosa, y el desplazamiento horizontal de la estructura se ve como un punto en naranja.

En otra combinación de forzamientos, las respuestas alcanzadas también muestran sincronía, pero esta vez en fase, verificándose que $z_2 = 0$. Las respuestas de ambos péndulos son oscilantes, como se observa en las [Figura 4](#) y [Figura 5](#). Las oscilaciones de la estructura son del orden de 10^{-3} m , representando una solución menos deseable que la de rotaciones, al absorber la estructura parte de la energía del forzamiento externo.

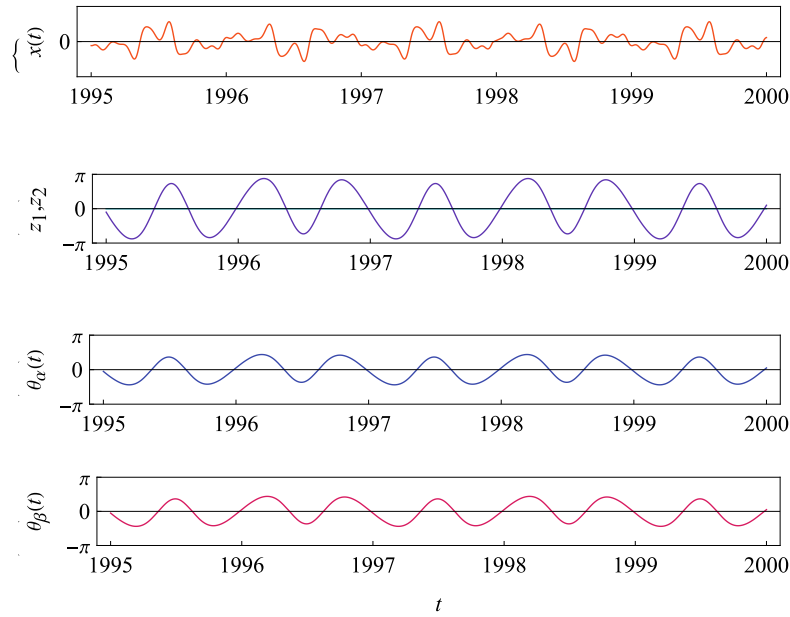


Figura 4: Respuestas temporales de oscilaciones sincronizadas en fase con $H = 145 \text{ mm}$, $\Omega = 2\pi H$ y condiciones iniciales $\theta_{\alpha 0} = -\theta_{\beta 0} = -\frac{\pi}{3}$, $\theta'_{\alpha 0} = -\theta'_{\beta 0} = 8$ y $x_{\alpha 0} = x_{\beta 0} = 0$.

Las soluciones encontradas son claramente más complejas que las observadas en péndulos individuales, lo que demuestra la influencia del acoplamiento mecánico entre los péndulos y la estructura.

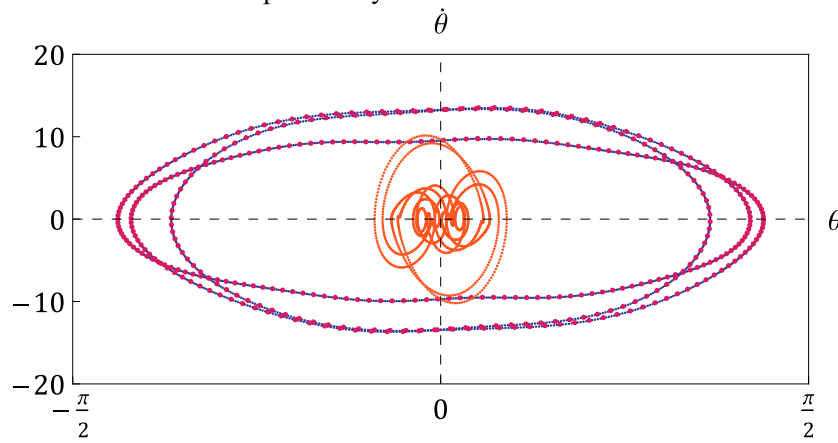


Figura 5: Respuestas sincronizadas en fase para oscilaciones en los péndulos α (azul) y β (rosa). Las oscilaciones horizontales de la estructura amplificadas 100 veces se muestran en naranja.

Conclusiones

Los resultados indican que, bajo ciertas condiciones de forzamiento, la sincronización es posible y puede ser aprovechada junto con un sistema de control para lograr rotaciones en sistemas de múltiples péndulos, con el objetivo de extraer energía del oleaje marino.

Entre los tipos de sincronización identificados, la sincronización en anti-fase se destaca como la más prometedora para la extracción de energía, ya que minimiza la transferencia de energía de los péndulos hacia la estructura de soporte, aumentando la eficiencia del sistema. Sin embargo, se requiere más investigación para caracterizar matemáticamente este fenómeno y desarrollar una ley de control que maximice la probabilidad de obtener rotaciones en anti-fase en péndulos montados sobre estructuras elásticas sometidas a forzamiento externo.

Adicionalmente, se está estudiando la influencia de la sincronización en la estabilidad de las respuestas. Un aumento en la estabilidad de las soluciones podría permitir mantener el estado de movimiento incluso bajo forzamientos no perfectamente periódicos, como ocurre en el oleaje marino, mejorando así la viabilidad de estos sistemas para aplicaciones prácticas.

Referencias

- Clifford, M. J., & Bishop, S. R. (1995). Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters. A*, 201(2–3), 191–196. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00255-2](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00255-2)
- Das, S., & Wahi, P. (2017). Initiation and directional control of period-1 rotation for vertically or horizontally excited parametric pendulum. *Procedia IUTAM*, 22, 99–106. <https://doi.org/10.1016/j.piutam.2017.08.013>
- de Paula, A. S., Savi, M. A., Wiercigroch, M., & Pavlovskaja, E. (2012). Bifurcation control of a parametric pendulum. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 22(05), 1250111. <https://doi.org/10.1142/s0218127412501118>
- Dotti, F. E., Luna, S. A., Oxarango, L., Virla, J. N., & Rojas, L. M. (2023). Experimental rotation control of the parametric pendulum using a velocity approach. *Mechanics Research Communications*, 129(104085), 104085. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2023.104085>
- Dotti, F. E., & Virla, J. N. (2021). Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 16(6). <https://doi.org/10.1115/1.4050699>
- Falnes, J. (2007). A review of wave-energy extraction. *Marine Structures*, 20(4), 185–201. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2007.09.001>
- Kumar, R., Gupta, S., & Ali, S. F. (2019). Energy harvesting from chaos in base excited double pendulum. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 124, 49–64. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.01.037>
- Lenci, S., Brocchini, M., & Lorenzoni, C. (2012). Experimental rotations of a pendulum on water waves. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 7(1), 011007. <https://doi.org/10.1115/1.4004547>
- Najdecka, A., Vaziri, V., & Wiercigroch, M. (2011). Synchronization control of parametric pendulums for wave energy extraction. *Renewable Energy and Power Quality Journal*, 535–539. <https://doi.org/10.24084/repqj09.383>
- Squire, P. T. (1986). Pendulum damping. *American Journal of Physics*, 54(11), 984–991. <https://doi.org/10.1119/1.14838>
- Yurchenko, D., & Alevras, P. (2018). Parametric pendulum-based wave energy converter. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 99, 504–515. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.06.026>