

Discusión sobre aparición de respuestas cuasiperiódicas en un sistema experimental de péndulo paramétrico

Discussion on the occurrence of quasi-periodic responses in an experimental parametric pendulum system

Presentación: 08/10/2024

Doctorando:

Lucas OXARANGO

Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada - Facultad Regional Bahía Blanca - Universidad Tecnológica Nacional - Argentina
lucasoxarango@frbb.utn.edu.ar

Director:

Franco E. DOTTI

Codirector:

Sebastián P. MACHADO

Resumen

En este trabajo se estudia la aparición de órbitas cuasiperiódicas en un sistema experimental compuesto por un mecanismo excitador recíprocante y un péndulo paramétrico. Para cuantificar la existencia observada de vibraciones espurias, primero se propone la adición de un grado de libertad conforme a características constructivas del sistema. Luego se establecen parámetros y regiones de interés para analizar el comportamiento del sistema, mediante evaluaciones numéricas y comparaciones con mediciones experimentales. Por último se discuten los resultados obtenidos y se los compara con las hipótesis planteadas.

Palabras clave: Péndulo paramétrico, órbitas cuasiperiódicas, sistema experimental.

Abstract

In this work, the occurrence of quasi-periodic orbits in an experimental parametric pendulum exciter system is studied. Firstly, to quantify the observed existence of spurious vibrations, the addition of a degree of freedom corresponding to constructive characteristics of the system is proposed. Then, parameters and regions of interest are established to analyze the behavior of the system, by means of numerical evaluations and comparisons with experimental measurements. Finally, the obtained results are discussed and compared with the proposed hypotheses.

Keywords: Parametric Pendulum, quasiperiodic orbits, experimental system.

Introducción

El péndulo paramétrico clásico representa un ejemplo recurrente en el estudio de la dinámica no lineal, ya que a pesar de su simplicidad matemática exhibe un comportamiento altamente no lineal incluyendo en sus respuestas caos, oscilaciones y rotaciones (Leven & Koch 1981; Clifford & Bishop 1995; Bishop & Clifford 1996; Garira & Bishop 2003). En los últimos años, se lo ha propuesto como dispositivo convertidor de energía cinética en eléctrica por diversos autores (Wiercigroch, 2010; Nandakumar, Wiercigroch, & Chatterjee, 2012; Dotti & Virla 2021). Dicha implementación trae consigo dificultades en la construcción y mantenimiento de las respuestas rotatorias, debido a sus características no lineales y coexistencia de distintas respuestas.

En muchos escenarios de forzamiento, para mantener las respuestas rotatorias se necesita una acción de control que corrija el estado del sistema. Sumado a las técnicas de control mayormente estudiadas basadas en retardos temporales (de Paula et al. 2012), recientemente se ha propuesto un enfoque basado en la velocidad de rotación del péndulo (Dotti et al. 2023). Muchas de estas técnicas de control son altamente sensibles a pequeñas variaciones, lo que podría afectar las respuestas en sistemas mecánicos. En el trabajo de Xu et al. (2007) se observó que las respuestas del péndulo eran afectadas por los sistemas excitadores, dando como resultado respuestas cuasiperiódicas. Por lo tanto, las interacciones entre el péndulo y el excitador afectarían la acción de control, ya que al no ser consideradas en el diseño del controlador, podrían hacer que este se encuentre trabajando fuera de los rangos preestablecidos u óptimos, generaría inestabilidad o produciría fallos inesperados.

En este trabajo se estudia el sistema péndulo-excitador presente en el laboratorio del Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP) para explorar la dinámica del mismo e identificar respuestas cuasiperiódicas. Luego de la introducción, se presenta el dispositivo excitador y el péndulo físico junto con sus características geométricas. En la siguiente sección se presentan las ecuaciones correspondientes al modelo matemático de ambos sistemas acoplados para después realizar comparaciones entre simulaciones numéricas y datos experimentales. Por último se discuten los resultados obtenidos.

Desarrollo

El sistema excitador consiste de un mecanismo biela manivela, donde un motor trifásico de inducción mueve una polea solidaria a la manivela con relación de transmisión variable. Esta a su vez mueve la biela, lo que genera el movimiento recíprocante en la base móvil. La base móvil se encuentra formada por una estructura rígida que se desliza mediante rieles sobre el bastidor fijo del excitador. Sobre ella se monta el sistema pendular y los elementos de medición y control.

El sistema pendular montado sobre la base móvil del excitador está formado por un rotor desbalanceado con dos masas solidarias a él en cuyo interior tiene imanes permanentes. Este a su vez es concéntrico a un estator con dos bobinas mediante las cuales se puede imponer al rotor una acción de control haciendo circular corriente eléctrica alterna por ellas. El conjunto excitador-sistema pendular puede apreciarse en la [Figura 1a](#).

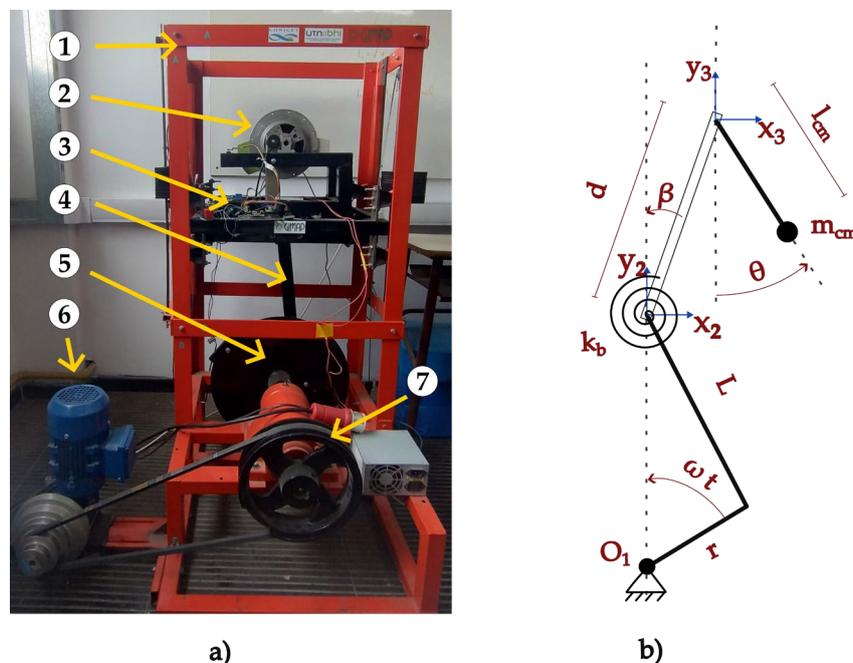


Figura 1: a) Excitador recíprocante instalado en el laboratorio del GIMAP, formado por: Estructura fija (1); Sistema pendular (2); Base o mesa móvil (3); Biela (4); Manivela (5); Motor trifásico (6); Poleas reductoras (7). b) Coordenadas del sistema.

Con este dispositivo se pueden obtener 15 configuraciones de experimentos, gracias a cinco opciones de frecuencia f (en Hz) siendo estas 2,361, 1,921, 1,540, 1,193 y 0,832, sumado a las tres posibilidades de longitud de la manivela de radio r (en milímetros) siendo 205, 106,5 y 75. Los experimentos realizados para este trabajo corresponden a la selección del radio fijo $r = 75$ y a la frecuencia de excitación 1,193 Hz.

De esta forma, el movimiento vertical de la mesa o base móvil se rige por el mecanismo biela manivela, cuya expresión queda definida como

$$Y(t) = r(1 - \cos(\alpha)) + L \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} \sin^2(\alpha)} \right), \quad (1)$$

donde r es el radio de la manivela, L el largo de la biela, y α es el ángulo de rotación de la manivela (Figura 1b), cuya variación con respecto al tiempo es considerada mediante la expresión $\alpha(t)=\omega t$, siendo ω la velocidad angular impuesta por el motor eléctrico y la relación de transmisión de las poleas.

Para obtener las ecuaciones gobernantes, el sistema pendular es reducido a un sistema equivalente, donde los parámetros considerados son el radio al centro de masa l_{cm} y la masa e inercia del centro de masa m_{cm} e I_{cm} respectivamente. El esquema del sistema puede observarse en la Figura 1b junto con las coordenadas utilizadas.

Además del movimiento vertical recíprocante dado por la ecuación (1), se observa que el sistema experimental presenta vibraciones laterales espurias en el plano $X_3 Y_3$ del mecanismo (Figura 1b). Se propone entonces modelar estas vibraciones con la inclusión de un grado de libertad extra en el sistema. Este grado de libertad denominado β , representa el ángulo de cabeceo de la mesa móvil del excitador con respecto al eje de la biela (Figura 1b).

Mediante la coordenada β (referida al plano $X_2 Y_2$) se pretende representar las interacciones generadas entre la mesa del excitador y el péndulo paramétrico como un ángulo de cabeceo, modelando una barra rígida que une el pivot del muñón de la biela con el eje de rotación del péndulo, considerando que tiene un resorte torsional k_b en esa posición y considerando la fricción en ese sitio. La masa M_b , el largo d , y la inercia I_b de la barra se estiman a partir de las características constructivas del excitador. Los parámetros k_b y c_b son utilizados para sintonizar el modelo con los experimentos.

Las ecuaciones gobernantes del sistema quedan planteadas como

$$I_{cm} \ddot{\theta} + c_\theta \dot{\theta} + c_p \operatorname{sgn}(\theta) + (gl_{cm}m_{cm} + l_{cm}m_{cm}\ddot{Y}) \sin(\theta) + dl_{cm}m_{cm}(\cos(\beta)\cos(\theta) - \sin(\beta)\sin(\theta))\ddot{\beta} - dl_{cm}m_{cm}(\sin(\beta)\cos(\theta) + \cos(\beta)\sin(\theta))\dot{\beta}^2 : \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{4} M_b d^2 + m_p d^2 + I_b \right) \ddot{\beta} + c_b \dot{\beta} + k_b \beta - \left(dg m_p + \frac{1}{2} dg M_b \right) \sin(\beta) + dl_{cm}m_{cm}(\cos(\beta)\cos(\theta) - \sin(\beta)\sin(\theta))\ddot{\theta} \quad (3)$$

$$-dl_{cm}m_{cm}(\sin(\beta)\cos(\theta) + \cos(\beta)\sin(\theta))\dot{\theta}^2 - \ddot{Y} \left(dm_p \sin(\beta) + \frac{1}{2} dM_b \sin(\beta) \right) = 0,$$

donde, sumado a los parámetros ya definidos, se agregan m_p como la masa total del sistema pendular (incluye el estator), c_θ el coeficiente de fricción viscosa, c_p el coeficiente de fricción seca y g la gravedad. En la Tabla 1 se pueden apreciar los valores de las constantes del sistema.

Parámetro [Unidad]	Magnitud	Parámetro [Unidad]	Magnitud
I_p [Kg m2]	0,0273	c_p [N m]	0,0085
m_{cm} [Kg]	1,09	I_b [Kg m2]	0,596
l_{cm} [m]	0,031	M_b [Kg]	17,4
m_p [Kg]	3,99	d [m]	0,26
c_θ [N m s]	0,0025	g [m/s2]	9,81

Tabla 1: Magnitudes de los parámetros considerados del sistema experimental.

Resultados

Se utilizó un integrador de Runge Kutta de Orden 45 para resolver en simultáneo las ecuaciones (2) y (3), simulando 2000 segundos donde solo se conservan los últimos 300 para estudiar la respuesta en estado estacionario. Se consideró un valor de parámetro de fricción c_b constante ($c_b = 0,0024$ N m s), tomando como referencia el obtenido para el sistema físico en el artículo de Dotti et al. (2023). Para la coordenada θ se

consideraron condiciones iniciales en los rangos de $(-\pi; \pi)$ y $[-10 \text{ s}^{-1}; 10 \text{ s}^{-1}]$ para posición y velocidad respectivamente, en la coordenada β que comienza del reposo en la posición vertical, es decir, $\beta_0 = 0$.

Mediante evaluaciones numéricas exhaustivas del sistema se identificaron valores de k_t para los cuales el ángulo de cabeceo β esté acotado en el rango definido entre $(-5^\circ; 5^\circ)$. Dicho rango es arbitrario y surge de la hipótesis de que el cabeceo tiene un valor similar al observado en mediciones experimentales, que influye en la dinámica del sistema pendular pero se encuentra acotado por factores constructivos del mismo. Esta suposición es utilizada solo para hacer un análisis numérico del sistema y seleccionar los parámetros para la exploración numérica. Se verificó además que cuando k_b aumenta, es decir la rigidez torsional aumenta considerablemente, la respuesta temporal tiende a la del péndulo paramétrico clásico.

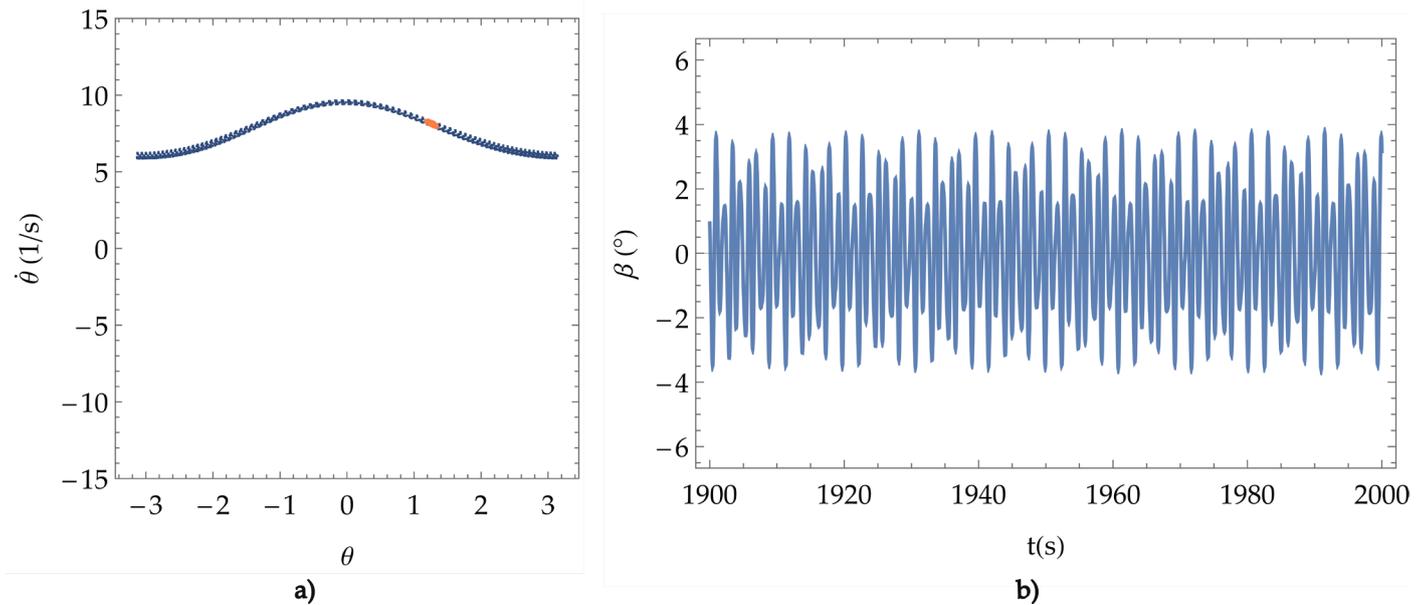


Figura 2: Respuesta rotatoria para $c_b = 0,0024$ y $k_b = 70$. a) Proyección del espacio de fase para el péndulo (azul) con sus puntos de Poincaré (naranja). b) Respuesta temporal para β (azul).

Con los resultados obtenidos, se establece una rigidez $k_b = 70 \text{ N m}$, con lo que se procede a simular distintas condiciones iniciales. Luego se identifican respuestas rotatorias y oscilatorias. En la [Figura 2a](#) puede observarse la proyección del espacio de fase de las respuestas rotatorias junto con su mapa de Poincaré. En la [Figura 2b](#) se aprecia como el ángulo β se encuentra dentro del rango de valores establecido previamente.

Al analizar el espacio de fase de la [Figura 2a](#), se observa que los puntos de Poincaré describen una elipse, dando indicios de respuestas cuasiperiódicas. Estas respuestas cuasiperiódicas se producen debido a que el sistema se encuentra formado por dos osciladores correspondientes a las coordenadas β y θ , acoplados de manera no lineal (Strogatz, 2024). Sumado a esto, los acoplamientos de las ecuaciones (2) y (3) están gobernados por múltiples parámetros, por lo que es un indicador de que pueden existir respuestas con estas características en el sistema. Por último, en la [Figura 2a](#) puede apreciarse que las trayectorias en el espacio de fase tienen una cobertura densa pero siempre dentro de un rango de valores, siendo este otro indicador de respuestas cuasiperiódicas.

Los resultados de la exploración numérica del sistema fueron luego comparados con valores medidos experimentalmente. Para ajustar las respuestas, se fijó el valor de rigidez torsional utilizado anteriormente ($k_b = 70 \text{ N m}$) y se varió el parámetro de disipación c_b . Se consideró que este se encuentra en el rango de valores $(0.001; 0.003)$ con una variación entre evaluaciones de $\Delta c_b = 0.0001$.

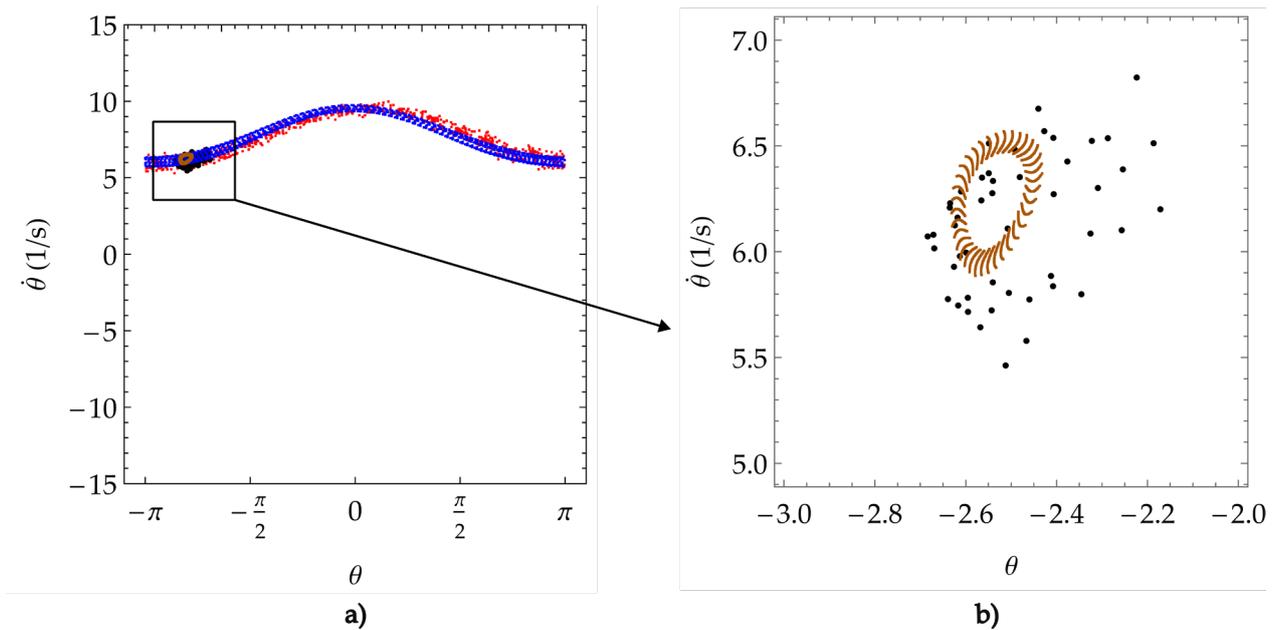


Figura 3: Respuesta rotatoria para $c_b = 0,0015$ y $k_b = 70$. a) Proyección del espacio de fase numerica para el péndulo (azul) con sus puntos de Poincaré (naranja), junto con mediciones experimentales (rojo) y sus puntos de Poincaré (negro). b) Ampliación de proyección del espacio de fase para puntos de Poincaré numéricos (naranja) y experimentales (negro).

En la **Figura 3a** se aprecia la proyección del espacio de fase de las respuestas rotatorias obtenidas numérica y experimentalmente, junto con sus mapas de Poincaré. Se observa que para el ángulo del péndulo (coordenada θ) existe una similitud entre ambos resultados (numéricos y experimentales). Además, en ambos casos se observan las trayectorias formando una nube densa de puntos para las simulaciones y las mediciones, y los Puntos de Poincaré concentrados en una elipse, lo que indicaría una respuesta cuasiperiódica en ambos casos.

Conclusiones

En este trabajo se estudió un sistema experimental compuesto por un mecanismo reciprocante y un sistema pendular. Se propuso un modelo simple que considera vibraciones espurias para obtener numéricamente respuestas cuasiperiódicas, previamente observadas en análisis experimentales. Se observó que para el ángulo de rotación del péndulo existe una similitud entre las simulaciones numéricas y las mediciones experimentales. Sin embargo, no se puede afirmar que el modelo presentado es fiel, ya que se debe comparar el ángulo de cabeceo numérico con el experimental para corroborar que las modificaciones propuestas capturan realmente los fenómenos que producen vibraciones espurias. A futuro se deben realizar mediciones y estimaciones precisas de todas las variables del sistema e identificar las imperfecciones en el excitador y comprender profundamente su origen.

Referencias

- Bishop, S. R., & Clifford, M. J. (1996). Zones of chaotic behaviour in the parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 189(1), 142–147. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0011>
- Clifford, M. J., & Bishop, S. R. (1995). Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters A*, 201(2–3), 191–196. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00255-2](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00255-2)
- de Paula, A. S., Savi, M. A., Wiercigroch, M., & Pavlovskaja, E. (2012). Bifurcation control of a parametric pendulum. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 22(05), 1250111. <https://doi.org/10.1142/s0218127412501118>
- Dotti, F., & Virla, J. (2021). Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. <https://doi.org/10.1115/1.4050699>

- Dotti, F. E., Luna, S. A., Oxarango, L., Virla, J. N., & Rojas, L. M. (2023). Experimental rotation control of the parametric pendulum using a velocity approach. *Mechanics Research Communications*, 129(104085), 104085. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2023.104085>
- Garira, W., & Bishop, S. R. (2003). Rotating solutions of the parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 263(1), 233–239. [https://doi.org/10.1016/s0022-460x\(02\)01435-9](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(02)01435-9)
- Leven, R. W., & Koch, B. P. (1981). Chaotic behaviour of a parametrically excited damped pendulum. *Physics Letters A*, 86(2), 71–74. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(81\)90167-5](https://doi.org/10.1016/0375-9601(81)90167-5)
- Strogatz, S. H. (2024). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (3rd ed.). Chapman & Hall/CRC.
- Nandakumar, K., Wiercigroch, M., & Chatterjee, A. (2012). Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications*, 43, 7–14. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2012.03.003>
- Wiercigroch, M (2010). “A new concept of energy extraction from waves via parametric pendulum”. En: UK patent application.
- Xu, X., Pavlovskaja, E., Wiercigroch, M., Romeo, F., & Lenci, S. (2007). Dynamic interactions between parametric pendulum and electro-dynamical shaker. *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 87(2), 172–186. <https://doi.org/10.1002/zamm.200610311>