

# Dinámica de Vigas Rectas y Curvas Funcionalmente Gradadas Incorporando Resonadores Locales Embebidos

## Dynamics of Functionally Graded Straight and Curved Beams Incorporating Embedded Local Resonators

Presentación: 8-9/10/2024

Doctorando:

**Walter Horacio FRUCCIO**

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa – Argentina.  
wfruccio@ing.unlpam.edu.ar

Director:

**Marcelo PIOVAN**

Codirector:

**Rogelio HECKER**

### Resumen

En el presente trabajo se introduce un modelo de viga de paredes delgadas, creada mediante materiales funcionales gradados cerámico/metálicos con inclusión de resonadores mecánicos. Se construye un modelo computacional por medio de la discretización en elementos finitos de una formulación débil asociada al principio de trabajo virtual. Con este enfoque computacional se efectúan estudios, orientados a la detección de las bandas de atenuación en el dominio de frecuencias.

**Palabras clave:** Vigas Curvas, Meta-materiales, Resonadores, Bandgaps.

### Abstract

In the present work, a thin-walled beam model is introduced, created using graded ceramic/metallic functional materials with the inclusion of mechanical resonators. A computational model is built through finite element discretization of a weak formulation associated with the virtual work principle. With this computational approach, studies are carried out aimed at detecting attenuation bands in the frequency domain.

**Keywords:** Thin-walled Beam, Meta-materials, Resonators, Bandgap.

### Introducción

Los meta-materiales representan un campo nuevo y emergente en la ingeniería de materiales, ya que se caracterizan por poseer propiedades excepcionales que no se encuentran comúnmente en materiales naturales. Estas meta-estructuras poseen un distintivo comportamiento vibratorio, es decir, la existencia de regiones de frecuencia específicas en las cuales se produce una reducción o atenuación significativa de la propagación de las ondas, conocidas como bandgaps. [Tan et. al, 2013; Sangiuliano, 2020].

El objetivo de este trabajo se centra en el análisis de la aparición de bandas de atenuación asociada con la variabilidad en las propiedades y la periodicidad de la estructura, para vigas de paredes delgadas con resonadores locales embebidos, construidas con materiales de gradación funcional (*functionally graded material: FGM*) [Piovan, 2012, 2013]. Para dicho análisis, se realizó un modelo computacional de elementos finitos 1D, para determinar el modelo determinístico de dichas estructuras periódicas.

## Desarrollo

### Descripción Cinemática

Se considera una viga finita de paredes delgadas con eje curvo, de sección transversal simétrica y con resonadores embebidos masa-resorte ubicados a lo largo de la longitud de la viga. En la Fig. 1 se describe el sistema de referencia primario {C : X, Y, Z} el cual se encuentra ubicado en el centro geométrico de la sección transversal, donde el eje X es tangente al eje circular de la viga, mientras que los ejes {Y, Z} se tomaran como los ejes principales de inercia y pertenecen a la sección transversal de la viga. Suponemos que la viga tiene un eje curvado, con un radio constante R, que está contenido en un plano  $\pi$ .

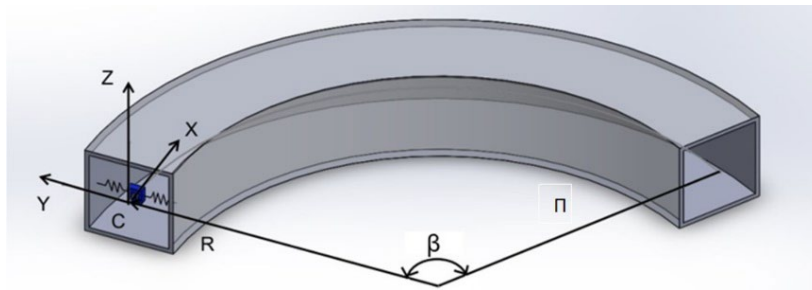


Figura 1: Viga curva de pared delgada con resonadores locales embebidos.

El modelo teórico de la meta-estructura portante se basa en las siguientes hipótesis:

A-La sección transversal de la viga curva tiene la configuración de paredes delgadas. La curvatura de la viga se ubica sobre el plano XY. B-La sección trasversal es regular y rígida en su propio plano. C-El campo de desplazamientos tendrá los términos lineales de primer orden para su descripción. D-Se considera el esfuerzo cortante producido por flexión y torsión. Se define una función de alabeo referida al centroide.

Teniendo en cuenta las hipótesis antes descriptas, tendremos el siguiente campo de desplazamientos [Piovan et. al, 2007].

$$\begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x - \underline{\omega}\theta_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Phi_3 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & 0 & -\Phi_1 \\ -\Phi_2 & \Phi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Donde

$$\Phi_1 = \phi_x \quad \Phi_2 = \theta_y \quad \Phi_3 = \theta_z - \frac{u_x}{R} \quad \Phi_w = \theta_x + \frac{\theta_y}{R} \quad (2)$$

Siendo  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  los desplazamientos del punto de referencia desde el centro del sistema de coordenadas principal,  $\theta_z$  y  $\theta_y$  parámetros de rotación flexional con respecto a los ejes Z e Y,  $\theta_x$  es el parámetro que indica la intensidad de alabeo y por último  $\phi_x$  que es el parámetro de rotación torsional. La función de alabeo puede ser aproximada con la siguiente expresión [Piovan, 2012].

$$\underline{\omega} = \bar{\omega}F \quad \text{donde} \quad F = \frac{R}{R + y} \quad (3)$$

Siendo  $\underline{\omega}$  la función de alabeo y  $\bar{\omega}$  la función de alabeo deducida del problema de torsión pura de Saint Venant [Piovan, 2012]. Y donde el factor F cuantifica el efecto de la curvatura a lo largo de la viga.

## Ecuaciones constitutivas y campo de deformaciones

Conforme al campo de desplazamientos y a las variables cinemáticas, se define el vector desplazamiento, el vector deformación y el vector de esfuerzos internos [Piovan, 2012].

$$\tilde{\mathbf{U}}^T = \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \phi_x, \theta_x\} \quad \tilde{\mathbf{D}}^T = \{\varepsilon_{D1}, \varepsilon_{D2}, \varepsilon_{D3}, \varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\} \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T = \{Q_x, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}$$

Siendo,  $\varepsilon_{D1}$  deformación axial,  $\varepsilon_{D2}$  y  $\varepsilon_{D3}$  deformaciones por flexión,  $\varepsilon_{D4}$  deformación por alabeo no uniforme,  $\varepsilon_{D5}$  y  $\varepsilon_{D6}$  deformación por corte-flexión,  $\varepsilon_{D7}$  deformación por corte de alabeo y  $\varepsilon_{D8}$  deformación por corte de torsión pura. Por otra parte,  $Q_x$  es la componente axial de la fuerza en la dirección X,  $M_y$  es el momento flector en la dirección Y,  $M_z$  es el momento flector en la dirección Z, B es el Bimomento,  $Q_y$  es la fuerza cortante en la dirección Y,  $Q_z$  es la fuerza cortante en la dirección Z,  $T_w$  es el momento torsor por alabeo y  $T_{sv}$  es el momento por torsión pura. De esta manera, la expresión general de las ecuaciones constitutivas queda definido de la siguiente forma.

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T = [J] \tilde{\mathbf{D}}^T \quad (5)$$

Donde  $J_E$  es la matriz constitutiva de los esfuerzos. Se definen las componentes del vector deformación, en función de las variables cinemáticas involucradas para el caso de análisis.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_y}{R}, \varepsilon_{D2} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\phi_x}{R}, \varepsilon_{D3} = \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{D4} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_{D5} &= \frac{\partial u_{yc}}{\partial x} - \theta_z, \varepsilon_{D6} = \frac{\partial u_{zc}}{\partial x} + \theta_y, \varepsilon_{D7} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x, \varepsilon_{D8} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\theta_y}{R} \end{aligned} \quad (6)$$

De la misma manera, podemos realizar el planteo de la parte inercial, donde se obtiene la matriz de coeficientes de masa o inercia.

$$\tilde{\mu} = M_m \tilde{\ddot{\mathbf{U}}} \quad \tilde{\mathbf{U}}^T = \{\ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{\theta}_z, \ddot{u}_{zc}, \ddot{\theta}_y, \ddot{\phi}_x, \ddot{\theta}_x\} \quad (7)$$

Donde  $M_m$  es la matriz de coeficientes de inercia.

## Discretización en elementos finitos. Principio de trabajo virtual

Se emplea un elemento finito unidimensional, en base a la formulación débil de las ecuaciones que rigen la estática y dinámica de la meta-estructura. Esta formulación se obtiene mediante el principio de trabajo virtual, a partir del siguiente indicador variacional.

$$\mathcal{W}_T = \int_L (\delta \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{Q}}) dx + \int_L \delta \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}_m \tilde{\ddot{\mathbf{U}}} dx - \int_L \delta \tilde{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{P}}_X dx \quad (8)$$

La formulación del elemento finito se obtiene mediante la discretización de la Ec. (8), donde se utilizan elementos de 5 nodos y funciones de forma cuárticas [Piovan et. al, 2007]. Lo que nos permite representar apropiadamente la mecánica de los movimientos en el plano y fuera del plano. El vector de las variables de desplazamiento se expresa de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_e &= \{\bar{U}_e^{(1)}, \bar{U}_e^{(2)}, \bar{U}_e^{(3)}, \bar{U}_e^{(4)}, \bar{U}_e^{(5)}\} \\ \bar{U}_e^{(j)} &= \{u_{xcj}, u_{ycj}, \theta_{zj}, u_{zcyj}, \theta_{ycj}, \phi_{xcj}, \theta_{xcj}\} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned} \quad (9)$$

El método de elementos finitos y la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema dinámico, deriva en la siguiente ecuación matricial correspondiente a la dinámica del modelo [Piovan et. al, 2007].

$$\hat{U} = [K - \omega^2 M + j\omega C]^{-1} \hat{F} \quad (10)$$

Donde K y M son las matrices globales de rigidez y masa,  $C = \eta_1 M + \eta_2 K$  es la matriz de amortiguamiento proporcional de Rayleigh, los coeficientes  $\eta_1$  y  $\eta_2$  se pueden calcular empleando dos coeficientes de amortiguamiento dados (es decir,  $\xi_1$  y  $\xi_2$ ) para el primer y segundo modo [Bathe, 1996]. Y  $\hat{U}$  y  $\hat{F}$  son la transformada de Fourier del vector de desplazamiento y el vector de fuerza, respectivamente; mientras  $\omega$  es la frecuencia circular medida en [rad/seg].

Se incorpora la dinámica de los resonadores masa-resorte, dentro de las ecuaciones de equilibrio de la estructura portante, devenidas del principio de trabajo virtual presentado en la Ec. (8). Donde la parte inercial se verá modificada por la dinámica de los N resonadores embebidos a lo largo de la viga. Para esto, se introduce un coeficiente  $\alpha$ , que es el cociente entre la masa total de los resonadores y la masa de la viga (masa distribuida).

$$\alpha_j^Y = \frac{m_j^{(Y)}}{\rho A l_M^{(Y)}} \quad \alpha_j^Z = \frac{m_j^{(Z)}}{\rho A l_M^{(Z)}} \quad (11)$$

Donde  $m_j^{(Y)}$  y  $m_j^{(Z)}$  es la masa de cada uno de los resonadores alineados en el eje Y y Z,  $l_M^{(Y)}$  y  $l_M^{(Z)}$  es la distancia entre los mismos a lo largo de la longitud de la viga en el eje Y y Z respectivamente, A es el área de la sección transversal de la estructura portante y  $\rho$  es la densidad de la estructura portante. De esta manera, al introducir la dinámica de los resonadores, y teniendo en cuenta la hipótesis que contempla un sistema viga-resonadores distribuidos continuamente e idénticamente iguales, para una cantidad de resonadores infinitos, desarrollada por Sugino (2016), se obtiene una nueva matriz global de masa M, que nos deriva en una nueva ecuación matricial correspondiente a la dinámica del modelo con resonadores locales embebidos.

## Resultados

### Verificación numérica del modelo

En esta sección se realiza una validación del modelo desarrollado, donde se comparan las frecuencias naturales del presente trabajo con los resultados correspondientes a dos trabajos seleccionados. Como primer caso, se comparan los valores obtenidos con el modelo numérico 1D del presente trabajo, para una viga curva tipo cajón de paredes delgadas reducida al caso de viga recta, con respecto a los resultados obtenidos en el modelo de elemento finito propuesto por Ziane (2012). En el segundo caso se comparan los valores de frecuencia de vibración libre del modelo 1D del presente trabajo, para una viga curva de sección transversal rígida, con el modelo de viga curva desarrollado por Piovan (2012). Para ambos casos, la comparación se realizó utilizando 12 elementos del modelo de elementos finitos 1D. En el primer caso, el resultado de la comparación nos arrojó un error máximo del 4 %, para las primeras 7 frecuencias naturales. Para el segundo caso, se obtuvieron mejores resultados, ya que la comparación arrojó resultados con un error máximo del 1 %, en este caso para las primeras 4 frecuencias naturales. Con lo cual, podemos asumir que, con los errores de ambas comparaciones, y teniendo en cuenta la cantidad de elementos utilizados, el modelo garantiza la obtención de buenos resultados.

### Estudios computacionales

Se emplea una viga curva FGM tipo cajón de paredes delgadas, con sección transversal simétrica y la condición de contorno empotrada-libre. Se ejecutó el análisis bajo una respuesta dinámica de excitación desde la base empotrada. Los datos más relevantes de la viga curva para la ejecución de los cálculos son los siguientes:  $R = 2$  m,  $L = 1$  m,  $\alpha_j^Y = \alpha_j^Z = 0,4$ . La viga curva de paredes delgadas, tiene una sección transversal rectangular, con las siguientes dimensiones:  $b = 0,01$  m,  $h = 0,02$  m y el espesor de la pared es  $t = 0,002$  m. Para atenuar la respuesta a una frecuencia específica  $\omega_r$  del sistema original, la frecuencia local del resonador debe ser elegida ligeramente menor (por ejemplo,  $\omega(Y) = 0,9\omega_r$ ,  $\omega(Z) = 0,9\omega_r$ ) [Cortínez, 2019; Sugino, 2017]. Esto es debido a la extracción de energía cinética por parte de la masa del resonador embebido [Cveticanin, 2016]. La Fig. 2 muestra la respuesta dinámica de la solución del elemento finito 1D, con la inclusión de los resonadores distribuidos a lo largo de la viga. Donde se puede apreciar la generación de una banda de atenuación o bandgap, en el sector comprendido en la vecindad del valor de la frecuencia original seleccionada, anulando

esta frecuencia específica. En cambio, en la Fig. 3, se puede apreciar la modificación del ancho de bandgap modificando el parámetro  $\alpha$ .

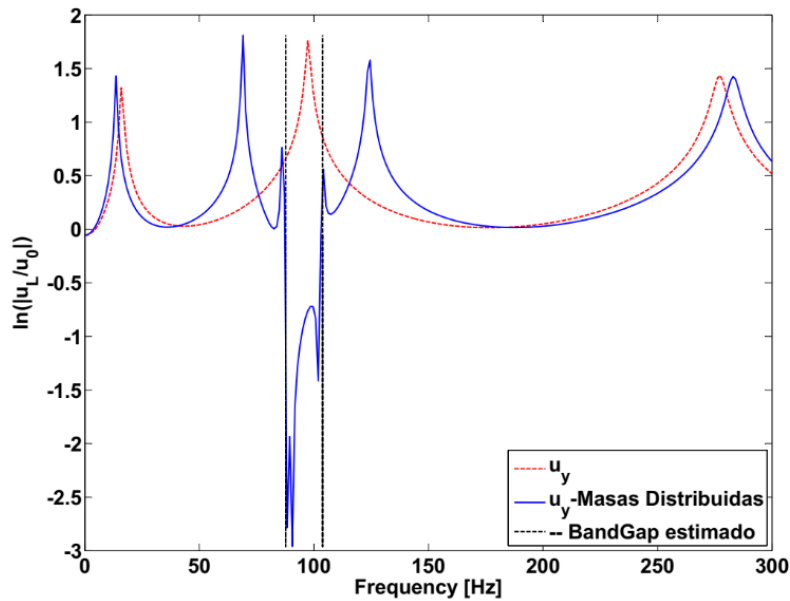


Figura 2: Respuesta dinámica de la viga FGM con y sin resonadores.

## Validación experimental

El modelo de elementos finitos 1D se validó con un ensayo de tipo experimental simple. Se compararon los resultados de la simulación de elementos finitos y las frecuencias naturales de una viga recta tipo fleje rígida, de sección transversal rectangular, en voladizo, sometida a una excitación de la base. La misma, se realizó mediante una fuente de vibración controlada, compuesta por el conjunto Amplificador-Caja acústica-Altavoz. Dicho amplificador está alimentado por un generador de funciones, para darle las propiedades requeridas a dicha excitación. La aceleración tanto de la probeta como de la base se obtuvieron mediante un acelerómetro ADXL203 de Analog Devices. El experimento fue diseñado para permitir flexibilidad en la colocación de probetas con distintas longitudes y secciones transversales. Además de la posibilidad de distribución de distintos resonadores a lo largo de la viga. Los datos obtenidos en dichos experimentos se utilizaron para calcular algunas de las propiedades del material utilizado para la fabricación de las probetas. En este caso se utilizó la tecnología de impresión 3D FDM para realizar la impresión de la mismas. Los resultados fueron más que satisfactorios, ya que se consiguieron errores por debajo del 1% en las primeras 4 frecuencias naturales. En la Fig. 4 se muestra el set experimental con la probeta tipo fleje empotrada en un extremo y libre en el restante.

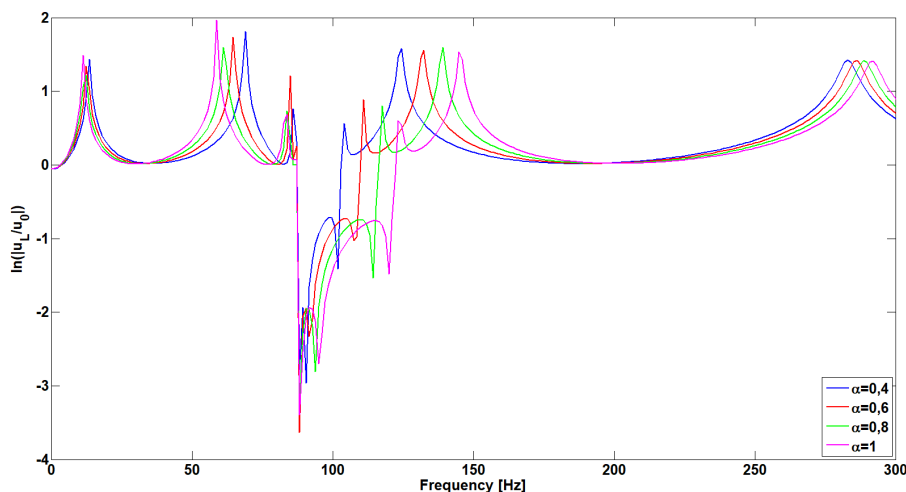


Figura 3: Respuesta dinámica de la viga FGM con Resonadores y distintos valores del coeficiente  $\alpha$ .



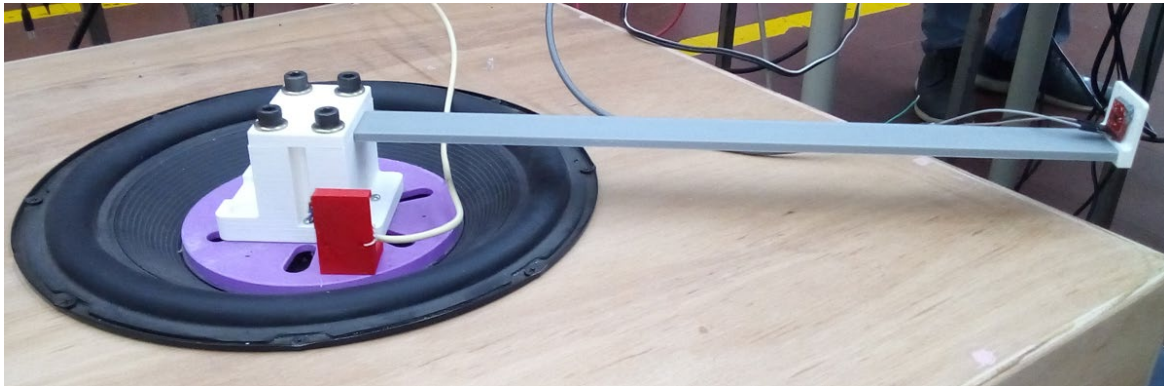


Figura 4: Configuración experimental con probeta tipo fleje impresa en 3D, en condición empotrada-libre.

## Conclusiones

En el presente trabajo se presentó un modelo de viga curva de paredes delgadas tipo cajón construida con materiales FGM y sección transversal simétrica, para el análisis de atenuación de vibraciones. Asimismo, se han efectuado estudios mediante la incorporación de resonadores embebidos, a lo largo del eje Y y el eje Z para el modelo computacional desarrollado. Para esto, se realizó la evaluación de la robustez del elemento finito 1D, apelando a la comparación y demostrando que, con el mismo, se obtienen resultados más que aceptables frente a la comparación con respecto al desarrollo de otros autores. En consecuencia, se puede indicar que, mediante la incorporación de los resonadores locales embebidos, se consiguió una banda de atenuación en la cual desaparece la frecuencia del sistema original.

## Referencias

- Bathe K.J (1996). *Finite Element procedures in Engineerign Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- Cortinez V. (2019) Bandas de atenuación de vibraciones flexotorsionales en vigas localmente resonantes. *ENIEF* 2019, 38:5–7.
- Cveticanin L. (2016) Theory of acoustic metamaterials and metamaterial beams: anoverview. *Acta Polytechnica Hungarica*, 13:43–62. doi:10.12700/APH.13.7.2016.7.3
- Di Giorgio L. (2021) Análisis de la pérdida de sintonía en metaestructura piezoeléctrica curva mediante enfoque probabilístico paramétrico. *Mecanica computacional - MECOM*, 38:521–530.
- Piovan M. y Cortínez V. (2007) Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability. *Thin Walled Structures*, 45:759–789. doi.org/10.1016/j.tws.2007.06.005
- Piovan M.T. (2009) A study on the dynamics of rotating beams with functionally graded properties. *Journal of Sound and Vibration*, 327:134–143. doi.org/10.1016/j.jsv.2009.06.01
- Piovan M.T. (2012) In-plane and out-of-plane dynamics and buckling offunctionally graded circular curved beams. *Composite Structures*, 94:3194–3206. doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.04.032
- Sangiuliano L. (2020) Influence of boundary conditions onthe stop band effect in finite locally resonant metamaterial beams. *Journal of Sound and Vibration*, 473:115225. doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115225
- Sugino C. (2016) On the mechanism of bandgapformation in locally resonant finite elastic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, 120:134–501. doi:10.1063/1.4963648
- Sugino C. (2017) A general theory for bandgap estimationin locally resonant metastructures. *Journal of Sound and Vibration*, 406:104–123. doi.org/10.1016/j.jsv.2017.06.004
- Sugino C. (2018) Merging mechanical and electromechanical bandgapsin locally resonant metamaterials and metastructures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 116:323–333. doi.org/10.1016/j.jmps.2018.04.005
- Tan K. y Huang H. (2013) Blast-wave impact mitigationusing negative effective massdensity concept of elastic metamaterials. *International Journal of Impact Engineering*, 64:20–29. doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2013.09.003
- Ziane N. (2012) International journal of mechanical sciences. *Journal of Applied Physics*, 66:273–282. doi.org/10.1016/j.jimecsci.2012.12.001