Universidad Tecnológica Nacional
AJEA – Actas de Jornadas y Eventos Académicos de UTN
Trabajo Completo Publicado en AJEA – Full Text Published in AJEA
https://rtyc.utn.edu.ar/index.php/ajea/article/view/1c44
Libro de actas de resúmenes DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.1640.2024
Colección JIT en AJEA https://rtyc.utn.edu.ar/index.php/ajea/JITs

Jóvenes Investigadores Tecnológicos RAFAELA 2023
Facultad Regional Rafaela 26 y 27 de octubre de 2023

Área: Tecnología educativa y enseñanza de la ingeniería / Categoría: Estudiantes de grado / Regional: Facultad Regional Santa Fe

Números complejos: autogestión del conocimiento aplicado en Ingeniería (en desarrollo).

Complex numbers: self-management of applied knowledge in Engineering (in progress).

Presentación: 17/10/2023

Emiliano Bauza.
Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Santa Fe.
bauzaemi@gmail.com
Esteban Montalvo.
Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Santa Fe.
mont_esteban@hotmail.com

Resumen

El presente trabajo describe el material creado para el aprendizaje autónomo y auto-regulado del contenido Números Complejos. Éstos forman parte de los conocimientos previos que el estudiante debería dominar (resolución del Consejo Superior) al ingreso a una carrera de ingeniería, aunque la experiencia muestra que no se cumple. Debido a esto, desde el PID “Integración de Contenidos de Química, Física y Matemática. Desarrollo de Competencias Básicas en Ingeniería, Métodos Taxonómicos y Transversalidad” se planificó un módulo de autoaprendizaje con material didáctico que la soporta, que respeta el tiempo de cada alumno para alcanzar el objetivo. Consta de materiales audiovisuales con documentación explicativa que están siendo desarrollados por alumnos avanzados de la carrera y supervisados por docentes. Estos se prevén compartir, según la complejidad, en los campus virtuales del espacio Ingreso a la Universidad y/o en los de las asignaturas de Matemática y/o de Materias Integradoras.

Palabras clave: Números complejos. Integración. Motivación. Ingreso universitario

Abstract

The present work describes material created for the autonomous and self-regulated learning of the topic Complex Numbers. This topic is part of the prior knowledge that students should master upon (resolution of the Superior Council) entering an engineering degree, although experience shows that this is not satisfy. Due to this, as part of the Project “Integration of Chemistry, Physics, and Mathematics Content, Development of Basic Engineering Competencies, Taxonomic Methods, and Transversality”, a self-learning module was planned with supporting instructional material, respecting each student’s needed time to achieve the objective. It consists of audiovisual materials with explanatory documentation that are being developed by advanced students and supervised by teachers. These are planned to be shared, depending on the complexity, in the virtual campuses of the University Admission space and/or in those of the Mathematics and/or Integrative Subjects subjects.

Keywords: Complex Numbers. Integration. Motivation. Admission

AJEA – Actas de Jornadas y Eventos Académicos de UTN
Libro de actas de resúmenes DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.1640.2024
Texto Completo Publicado en AJEA – Full Text Published in AJEA
https://rtyc.utn.edu.ar/index.php/ajea/article/view/1644

Introducción

La Resolución 1639 de 2016 del Consejo Superior de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) establece la obligación de que los aspirantes a las carreras de grado de la UTN aprueben el Seminario de Ingreso. Este seminario abarca una serie de contenidos en materias como Matemática y Física, que incluyen conjuntos numéricos, ecuaciones, trigonometría, funciones y vectores, entre otros. La resolución señala que el conocimiento de Números Complejos (NC) y sus operaciones como parte de los conocimientos previos que los estudiantes deben tener al ingresar a una carrera de ingeniería. Además, se destaca que las representaciones de los NC son útiles para ilustrar conceptos en otras áreas y que tanto los estudiantes como sus compañeros de ingreso deben ser capaces de trabajar con situaciones que requieran el uso de NC.

Nuestra propia experiencia muestra que eso no se cumple ya sea porque este tema no se desarrolla en la escuela media o porque la compresión de este no es reflexiva, basada en procedimientos mecanizados y no transferibles a situaciones problemáticas.

Los docentes entrevistados del curso introductorio concluyen que, si bien la problemática no es nueva, la pandemia la acrecentó. Es oportuno aclarar que, en el Seminario de Ingreso a la Universidad, en la unidad Conjuntos Numéricos se mencionan los NC, se ejemplifica con algún caso surgido de una resolvente de un polinomio de segundo grado, pero no se tratan ni evalúan sus distintas representaciones y operaciones. No se pide, por ejemplo, verificar la raíz compleja de un polinomio.

Por otro lado, en asignaturas del área matemática de materias básicas los docentes comentan que han escuchado en varias oportunidades el reclamo de sus alumnos “¿para qué necesitamos los números complejos?”. Se requieren manipularlos, por ejemplo, para diagonalizar matrices con autovalores complejos, cuando se utilizan series para justificar la fórmula de Euler [1] o se debe apelar a la función exponencial en el campo complejo [2] para justificar la solución de una ecuación diferencial homogénea.

$$e^{bi} = cos(b) + i\ sen(b) \qquad [1]$$
$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}[cos(bx) + i\ sen(bx)] \qquad [2]$$

Por lo expuesto en el párrafo anterior, es indiscutible la necesidad de la correcta manipulación en segundo nivel de las especialidades donde la electricidad y electrónica juegan un preponderante papel. En el caso de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional (FRSF- UTN) incumbe fundamentalmente a Ingeniería en Energía Eléctrica, aunque también atraviesa a Ingeniería en Sistemas de la Información e Ingeniería Mecánica.

El Proyecto de Investigación y Desarrollo (PID) “Integración de Contenidos de Química, Física y Matemática. Desarrollo de Competencias Básicas en Ingeniería, Métodos Taxonómicos y Transversalidad”, pretende dar una mirada introspectiva a la forma de enseñar y evaluar, generar actividades para lograr una mayor vinculación y visibilizar la importancia del conocimiento de las ciencias básicas para el aprendizaje de otras asignaturas del ciclo superior de cada una de las carreras.

Como becarios del proyecto mencionado consideramos relevante consultar a docentes de Materias Básicas y de Ingeniería en Energía Eléctrica para redactar un material que sirva para que nuestros compañeros ingresantes obtengan dichos conocimientos necesarios en distintas etapas de la carrera de una manera más expeditiva y eficaz, para finalmente usarlos a la hora de la resolución de circuitos eléctricos de corriente alterna. Un video sobre la resolución de un circuito finalmente puede dar respuesta a la pregunta: ¿para qué necesitamos los estudiantes de ingeniería conocimiento y manejo de los NC?

Para ello se planificaron actividades y materiales didácticos que las soportan, que en su conjunto forman un módulo de autoaprendizaje. Éste consta de videos y archivos de textos que se compartirán, según la complejidad, en los campus virtuales del espacio Ingreso a la Universidad y en los de las cátedras de Análisis Matemático I y II, con la posibilidad de ser compartido en algunas integradoras y/o específicas tales como Integración Eléctrica I y II, Matemática Superior; Cálculo Avanzado; Cálculo Numérico; Fundamentos para el Análisis de Señales.

Metodología

Tomando la idea del marco conceptual de los Diseños Curriculares de las carreras Ingeniería en Energía Eléctrica (Ord. 1873/2022); Ingeniería en Sistemas de Información (Ord. 1877/22), Ingeniería Mecánica (Ord. 1901); que, en resumidas cuentas, busca una metodología didáctica que equilibre competencias y conocimientos esenciales en campos científicos, tecnológicos y de

AJEA – Actas de Jornadas y Eventos Académicos de UTN
Libro de actas de resúmenes DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.1640.2024
Texto Completo Publicado en AJEA – Full Text Published in AJEA
https://rtyc.utn.edu.ar/index.php/ajea/article/view/1644

gestión, junto con formación general, fomentando la adaptación a avances en ciencia y tecnología. Esto se logrará en un ambiente inclusivo y multicultural, promoviendo la habilidad de "aprender a aprender". La meta es cultivar competencias ingenieriles básicas al estimular a estudiantes con herramientas para comprender asignaturas básicas y específicas. A través de la colaboración entre estudiantes y docentes, se generan recursos académicos adaptables a un entorno virtual, impulsando conocimientos integrales y especializados.

Material 1: Conjuntos Numéricos

Objetivo: conocer las distintas formas de representación de un número complejo (rectangular, polar) y las operaciones básicas.

Para esto se desarrolla material didáctico en forma de presentación de PowerPoint con un correspondiente video donde se explica todo lo desarrollado en la misma. El material presentado en esta sección se prevé para los espacios del Seminario de Matemática del Ingreso a la Universidad y/o de Análisis Matemático I, referenciado en las distintas asignaturas cuyos estudiantes necesiten recuperar contenidos. (ej. Análisis Matemático II o Cálculo Avanzado).

El material no está pensado para ser abordado de una determinada forma, sino más bien para dejarlo a disposición del alumno y que éste decida cómo y cuándo tratarlo. La finalidad del video es ser un medio asincrónico tanto para explicar toda la presentación como para salvar dudas que puedan surgirle al alumno sobre el tema de estudio.

En el material se comienza recordando la presencia de los números complejos en la obtención de las raíces de ciertas ecuaciones cuadráticas en una variable (ecuación de segundo grado). En general el alumno ingresante no está familiarizado con raíces complejas; es más frecuente la justificación “no tiene raíces” a “los ceros no son reales”.

A partir de este punto, se hace un desarrollo de los distintos subconjuntos numéricos incluidos en los reales (racionales, irracionales, enteros, naturales) y sus representaciones en la recta real. Se presenta el número imaginario “i”, surgiendo como un número no real ($i = \sqrt{-1}$ ó $i^2 = -1$) y que unido al conjunto de los reales dan origen al conjunto universal de los números: los Números Complejos. Dado que los imaginarios no tienen lugar dentro de la recta real, nace allí la necesidad de representarlos de otra manera, surgiendo el plano complejo como forma de representar y ordenar a los NC (Figura 1).

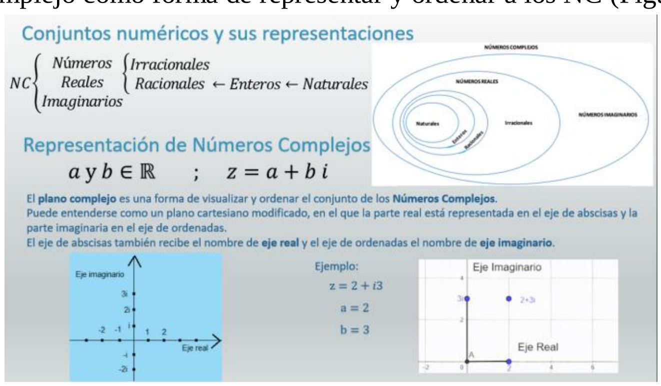

Figura 1 - Representación y explicación del conjunto de los Números Complejos.

Luego, se mencionan las distintas representaciones: par ordenado, binómica o rectangular, trigonométrica, polar y exponencial que puede tener un número complejo, mostrando algunos ejemplos de los pasajes de una forma a otra. También se presentan lo que son el “conjugado” y el “opuesto” de un número complejo, con gráficas que exponen un ejemplo para cada caso, graficas desarrolladas mediante el uso de la herramienta GeoGebra (Figura 2).

AJEA – Actas de Jornadas y Eventos Académicos de UTN
Libro de actas de resúmenes DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.1640.2024
Texto Completo Publicado en AJEA – Full Text Published in AJEA
https://rtyc.utn.edu.ar/index.php/ajea/article/view/1644

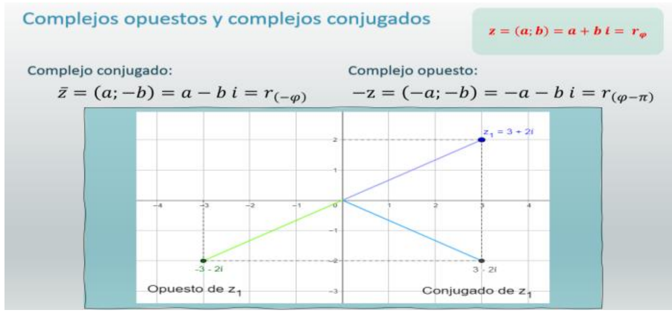

Figura 2 - Opuesto y conjugado de un número complejo

Finalmente se muestran operaciones que se pueden llevar a cabo con números complejos (múltiplo, suma, resta, multiplicación, división, raíz enésima), incorporando ejemplos de éstas con representaciones en forma rectangular y polar con el objetivo de mostrar las potencialidades o conveniencias de utilizar una en particular en cada caso (por ejemplo, multiplicar/dividir en polares, sumar/restar en cartesianas).

Material 2: Fórmula de Euler

Objetivos:

1. Usar desarrollo en series de potencias para justificar la fórmula de Euler [1].
2. Usar la fórmula de Euler para obtener la identidad de Euler [3]

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \qquad (\text{ ó } \qquad e^{\pi i} = -1) \qquad [3]$$

La fórmula de Euler establece la relación fundamental entre las funciones trigonométricas y la función exponencial compleja. Es omnipresente en matemáticas, física, química e ingeniería. El físico Richard Feynman (reseñando en Wikipedia) indicó a la ecuación como "la fórmula más notable de las matemáticas". Será usada para determinar la solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea a coeficientes constantes en Análisis Matemático II, por lo que se necesitan que los estudiantes la conozcan y mejor aún, entiendan su origen; más allá que luego podrá ser hallada en un resumen de fórmulas (Figura 3). Esta identidad es considerada una belleza matemática por vincular distintas áreas de esa ciencia formal que parecen distintas y sin relación alguna a simple vista.

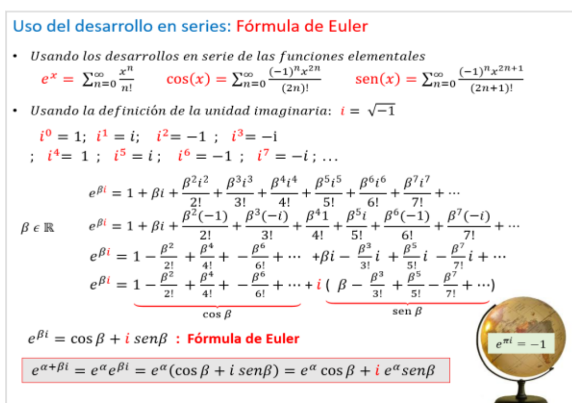

Figura 3 – Desarrollo en series de la Fórmula de Euler

El material 2 (Fórmula de Euler), se puede compartir en el campus de Análisis Matemático I y II y en la descripción de este se referencia y relaciona al Material 1 (Conjuntos Numéricos). El alumno de Análisis Matemático I es invitado a visitar la presentación audiovisual luego de culminado el tema “desarrollo en series de potencia”- a modo de reparar en una aplicación de dicho contenido, extrapolando los resultados al campo complejo-, mientras que el de Análisis Matemático II tiene la obligación de consultarlo, previo al tratado de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden. Dejarlo a disposición del alumno permite el tratamiento asincrónico que éste decida cómo y cuándo abordarlo.

AJEA – Actas de Jornadas y Eventos Académicos de UTN
Libro de actas de resúmenes DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.1640.2024
Texto Completo Publicado en AJEA – Full Text Published in AJEA
https://rtyc.utn.edu.ar/index.php/ajea/article/view/1644

Material 3: Nexo con los Circuitos Eléctricos

Objetivo: Mostrar la conveniencia del uso de los NC al resolver un circuito eléctrico, relacionándolo con lo desarrollado en el Material 1 y 2.

Este material didáctico, también en forma de presentación de PowerPoint, lleva consigo un correspondiente video explicativo de la presentación, un documento de teoría en el que se explican con mayor profundidad los conceptos desarrollados en la presentación, y una presentación hecha con Genially, aplicación web de uso gratuito, en la cual se hace la resolución, de forma dinámica, de un circuito eléctrico RL en estado permanente, vinculándolo con conceptos presentados en el documento de teoría.

El material está pensado para en primera instancia trabajar la teoría de la aplicación, y luego ver el ejemplo desarrollado con Genially. La finalidad del video es ser un instrumento asincrónico para explicar la presentación hecha con PowerPoint y para resolver las dudas que puedan surgir al alumno sobre el tema de estudio.

El PowerPoint comienza explicando la tensión que se obtiene con un Generador Elemental de Tensión Alterna, la cual tiene forma senoidal siendo esta dada por [4]:

$$v(t) = V_m * sen(\omega t + \phi) \qquad [4]$$

Sabiendo esto, se busca escribir la misma de forma fasorial, ya que es más útil para el análisis en el dominio de la frecuencia y simplificar los cálculos. Luego de presentar y recordar la forma general de un fasor [5], se muestra la relación entre la misma y la de los senoides, indicando que la misma se basa en la forma Compleja de Euler [6] (note la semejanza con la [1]). En el caso de las aplicaciones en el campo de la electricidad, se suele representar al número imaginario *i* (llamado así en el Material 1 y 2) con la letra *j*, ya que, el uso de la letra *i* es exclusivo para la intensidad de corriente instantánea. También se adicionan gráficas para mejorar la comprensión de cómo se representa una senoide con fasores (Figura 4).

$$V = V_m * e^{j\phi} \qquad [5]$$
$$e^{j\phi} = cos(\phi) + j * sen(\phi) \qquad [6]$$

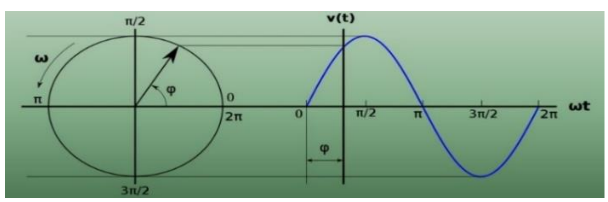

Figura 4 - Correspondencia entre un fasor y una onda senoidal

Seguido a esto, se desarrolla brevemente el paso de forma senoidal a fasorial de una función mediante el uso de la fórmula de Euler previamente mencionada, continuando con un breve repaso de qué son los fasores y sus formas de representación.

Llegado a este punto, se explican lo que es y cómo está compuesta la impedancia que se puede presentar en un circuito eléctrico. Para ayudar en la comprensión de la relación entre los números complejos y ésta, se lleva a cabo (como ejemplo) el cálculo de la impedancia de un circuito eléctrico (Figura 5).

Con la presentación realizada mediante la aplicación Genially, se puede mejorar la comprensión del tema con la resolución de un ejemplo predeterminado.

AJEA – Actas de Jornadas y Eventos Académicos de UTN
Libro de actas de resúmenes DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.1640.2024
Texto Completo Publicado en AJEA – Full Text Published in AJEA
https://rtyc.utn.edu.ar/index.php/ajea/article/view/1644

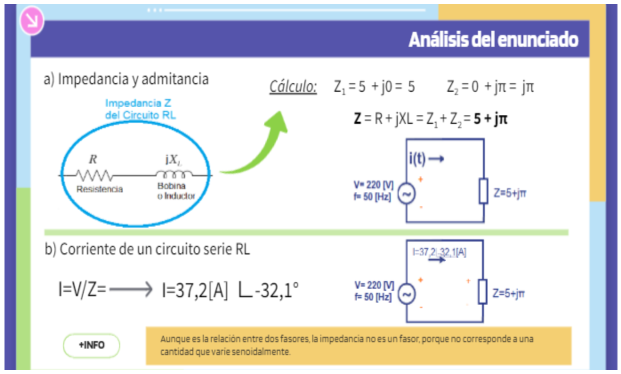

Figura 5 - Calculo de impedancia y corriente de un circuito
con números complejos

Por último, se explica lo que es la potencia instantánea y cómo se presenta y calcula en un circuito. Al estudiarla, definimos el factor de potencia y la Potencia Aparente, ésta última para ser abordada utiliza NC.
El video será incluido como aplicación de ecuaciones diferenciales en el campus de Análisis Matemático II (para ser visitado luego de resuelta la EDO que modela el circuito). Pretende dar respuesta a la pregunta frecuente de los estudiantes ¿son necesarios los NC? Dado que el problema muestra cómo se simplifica el tratamiento matemático cuando se los utiliza. Puede a su vez ser referenciado en el seminario de ingreso, como ejemplo motivacional para "perder el miedo" a trabajar con ellos. También puede resultar de interés en las asignaturas del primer y segundo nivel.

Resultados y discusión

El diseño de esta propuesta está de acuerdo con los lineamientos impuestos por la UTN y el CONFEDI en la necesidad de desarrollar competencias genéricas que suponen "aprender en forma continua y autónoma", de allí el origen del material pensado para que los jóvenes puedan auto gestionar sus conocimientos, respetando sus ritmos de aprendizaje. En la redacción se tuvo en cuenta las recomendaciones dadas por Biggs, (2005) en que el aprendizaje es un proceso de construcción individual y social, que los estudiantes deben regular, y por el que tienen que responsabilizarse.

Como ya fue mencionado, pretende ser una contribución para desarrollar la competencia de *aprender a aprender*, lo que Zabalza (2013) distingue como necesidad de fomentar un aprendizaje permanente cuando expresa "En nuestra opinión, la misión de la Universidad no reside tanto en completar y cerrar la formación sino en sentar unas bases sólidas que permitan a los egresados continuar con su formación en las sucesivas etapas de su vida personal y profesional".

El material previsto se anticipa que facilite la comprensión de conceptos potencialmente complejos mediante la exposición de los temas, tanto teóricos como prácticos, a través de presentaciones secuenciales, complementadas con contenidos en formato de vídeo y actividades interactivas. Estas herramientas están diseñadas para consolidar y reforzar el aprendizaje de los conceptos.

Conclusiones y trabajos futuros

Si bien el material está en etapa de evaluación y mejora, es un logro ya tener una primera versión para el abordaje de los NC cuando el estudiante lo considere necesario. No es posible relacionar el aprendizaje de los números complejos de manera auto-gestionada, aunque compañeros que han tenido contacto con el material lo valoraron positivamente, fundamentalmente porque les alivia la incertidumbre y preocupación a la que los enfrenta los problemas donde se necesita operar con NC.

Queda por delante compartirlo con el colectivo docente, invitarlos a su valoración para luego presentarlos a los estudiantes con el objetivo de observar y analizar los logros y competencias que puedan adquirir a través de la implementación de este módulo de autoaprendizaje. Para la obtención de resultados, se planifica realizar encuestas en los cursos de Análisis Matemático I y II y así valorar su utilidad para relacionar los contenidos de la cátedra con los NC, en especial el uso de las series de potencias para la obtención de la fórmula de Euler; su uso radica en la obtención de la solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de orden superior y el uso de los NC en el tratado de los circuitos eléctricos. Tres ejemplos donde se confirma que la conveniencia

AJEA – Actas de Jornadas y Eventos Académicos de UTN
Libro de actas de resúmenes DOI: https://doi.org/10.33414/ajea.1640.2024
Texto Completo Publicado en AJEA – Full Text Published in AJEA
https://rtyc.utn.edu.ar/index.php/ajea/article/view/1644

y la necesidad del uso de los NC trasciende a la electricidad y electrónica, sino que son utilizados en el ciclo básico de cualquiera de las especialidades de ingeniería.

Referencias bibliografías

Biggs, J. (2005). *Calidad del aprendizaje universitario*. Madrid: Narcea.

CONFEDI (2018). Libro rojo. Autoedición. Propuesta de Estándares de Segunda Generación para la Acreditación de Carreras de Ingeniería en la República Argentina. "Libro Rojo de CONFEDI". Disponible en https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/LIBRO-ROJO-DE-CONFEDI- Estandares-de-Segunda-Generacion-para-Ingenieria-2018-VFPublicada.pdf. Accedido el 10 de julio de 2023.

Diseño Curricular de la Carrera Ingeniería en Energía Eléctrica - Plan 2023 – Ordenanza 1873/2022 del Consejo Superior de la Universidad Tecnológica Nacional. Disponible en https://buscadorcsu.rec.utn.edu.ar /home

Feynman, R. (1977). *The Feynman Lectures on Physics, vol. I*, Addison-Wesley, 22-10. ISBN 0-201-02010-6. Consultado en Wikipedia: Fórmula de Euler. Wikipedia. https://es.wikipedia.org/wiki/Formula_de_Euler. Accedido el 23 de agosto de 2023.

Ingreso a las carreras de grado de la UTN. Ordenanza 1639/2016 del Consejo Superior de la Universidad Tecnológica Nacional. Disponible https://buscadorcsu.rec.utn.edu.ar/home

Gallagher, J (2014). Matemáticas: Por qué el cerebro ve las matemáticas como belleza. BBC News Online. https: //www.bbc.com/news/science-environment-26151062 Consultado el 26 de diciembre de 2017.

Rodríguez, J. (2004). *El aprendizaje basado en problemas*. Madrid: Editorial Médica Panamericana

Zabalza, M. (2013). "Formar ingenieros para el siglo XXI". *Revista de Docencia Universitaria.*,11.
Disponible en https://polipapers.upv.es/index.php/REDU/article/download/5544/5535. Accedido el 10 de julio de 2023.

Agradecimientos. Los autores agradecen la colaboración de los estudiantes invitados a valorizar el material y a los responsables de las asignaturas que aportaron ideas y contenidos para la redacción, asimismo colaborando en la valoración de ellos.