

# Determinación numérica de velocidad de resonancia en cojinetes hidrodinámicos de longitud finita.

## Numerical determination of resonance velocity in finite-length hydrodynamic bearings.

Presentación: 04/09/2023

### Martín Zanatta

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe, Argentina  
martinzana77@gmail.com

### Tomás Salvadores

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe, Argentina  
salvadoestomas@gmail.com

### Resumen

En este trabajo se presenta una revisión del cálculo de los coeficientes elásticos y de amortiguamiento clásicos obtenidos a partir de los modelos teóricos de cojinetes infinitamente cortos e infinitamente largos. Posteriormente se utiliza una herramienta de cálculo mediante el Método de Volúmenes Finitos para la obtención de estos coeficientes en cojinetes reales utilizando derivación numérica. Es posible así representar y simular el comportamiento transitorio de dos cojinetes integrados en un sistema masa-árbol-cojinetes, y comprobar su comportamiento de estabilidad ante la resonancia, según la velocidad de giro. La herramienta desarrollada entrega resultados en excelente acuerdo con los reportados en la bibliografía, mejorando sustancialmente el tiempo de cálculo. Estos resultados permitirán en el futuro abordar mediante soluciones linealizadas problemas de cargas dinámicas, texturas y cavitación.

**Palabras clave:** Cojinetes hidrodinámicos, coeficientes elásticos y de amortiguamiento, Método de Volúmenes Finitos, Resonancia.

### Abstract

This work presents a review of the calculation of classical elastic and damping coefficients obtained from theoretical models of infinitely short and infinitely long bearings. Subsequently, a calculation tool using the Finite Volume Method is employed to determine these coefficients in real bearings using numerical differentiation. This allows the representation and simulation of the transient behavior of two bearings integrated into a mass-shaft-bearing system, and the assessment of their stability behavior under resonance conditions, depending on the rotational speed. The developed tool provides results in excellent agreement with those reported in the literature, substantially improving calculation time. These results will enable the future addressing of problems related to dynamic loads, textures, and cavitation through linearized solutions.

**Keywords:** Hydrodynamic bearings, elastic and damping coefficients, Finite Volume Method, Resonance.

### Introducción

Los cojinetes hidrodinámicos son elementos de máquina con la doble función de permitir el deslizamiento con baja fricción de sus componentes y, simultáneamente, soportar las solicitaciones propias de su funcionamiento. Los cojinetes utilizados

en cigüeñas y bielas de un motor, por ejemplo, deben funcionar durante miles de kilómetros a altas temperaturas y bajo condiciones de carga variables. La capacidad portante de un cojinete hidrodinámico es producida por la presión de la película fluida que puede ser generada por el propio movimiento de los elementos. En todos los casos, el comportamiento fluido-dinámico está gobernado por las leyes del flujo viscoso.

La estabilidad de los cojinetes es fundamental para un correcto funcionamiento en donde no exista contacto entre Eje-Carcasa. Esta depende de diferentes parámetros como son la carga aplicada, las dimensiones del cojinete y la velocidad de giro. Existen estudios donde se demuestra que un cojinete es estable bajo ciertas circunstancias hasta que se supere una velocidad de giro umbral, donde alcanza la resonancia (Muszynska, 1988). Estos estudios están centrados en casos límite de cojinetes infinitamente largos o infinitamente cortos.

En este artículo se presenta un estudio de la velocidad crítica en la cual el cojinete alcanza resonancia mediante la modelización de la dinámica del muñón a partir de un sistema masa resorte amortiguado. Se obtienen los coeficientes elásticos y de amortiguamiento clásicos para diferentes relaciones  $L/D$ , los cuales permiten realizar una resolución de manera lineal.

## Metodología

La geometría del cojinete se encuentra determinada por los parámetros que se observan en la Figura 1, es decir, diámetro  $D$ , largo  $b$ , huelgo  $h(\vartheta)$  (definido por el espacio entre el muñón y la carcasa) y la excentricidad  $e$ . Otro parámetro geométrico de importancia es la excentricidad relativa  $\varepsilon = e/h$  cuyo valor es 0 para el caso de un muñón perfectamente concéntrico con la carcasa y 1 cuando está en contacto con ella.

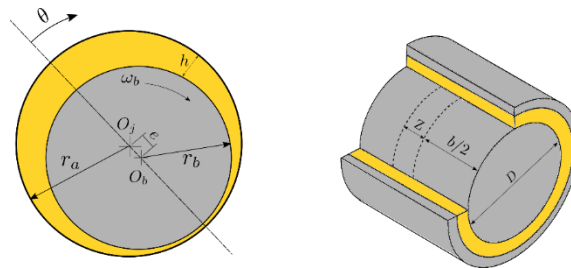


Figura 1: Parámetros geométricos de un cojinete hidrodinámico.

La distribución de presiones a lo largo de la circunferencia de la película de fluido se encuentra descrita por la Ecuación de Reynolds (Ec. 1), esta surge de la integración de las ecuaciones de Navier-Stokes y la de continuidad considerando hipótesis simplificativas (Hamrock, 1991) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho h (u_a - u_b)}{2} \right] + \rho \left( w_a - w_b - u_a \frac{\partial h}{\partial x} \right) + h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1)$$

donde:  $\rho$  es la densidad del lubricante,  $\eta$  es su viscosidad dinámica,  $u_a$  y  $u_b$  son las velocidades tangenciales de la carcasa y el muñón respectivamente,  $w_a$  y  $w_b$  sus velocidades radiales.

Para la resolución del transitorio de funcionamiento de cojinete propuesto se utiliza un modelo con interacción fluido-estructura, donde el dominio fluido y la integración de la posición del muñón se resuelven mediante un solver 2.5D no lineal desarrollado en la plataforma Octave (dynCav), el cual resuelve el campo de presiones mediante el Método de Volúmenes Finitos.

Para comenzar el estudio es necesario modelizar el cojinete como un sistema simplificado masa resorte amortiguado como se observa en la figura 2, para reemplazar el efecto realizado por el lubricante. En este modelo encontramos resortes y

amortiguadores ubicados de forma vertical, horizontal y cruzados. Estos últimos indican la aparición de una fuerza producida por el lubricante en una dirección diferente a la dirección en la que se generó la perturbación.

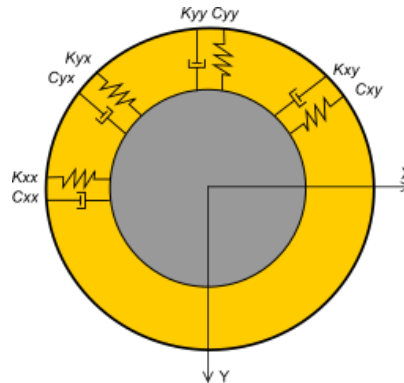


Figura 2: Modelo simplificado de un cojinete mediante un sistema masa resorte amortiguado.

La nueva ecuación de equilibrio (Ec. 2) es lineal, simplificando la resolución del transitorio del cojinete.

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \ddot{X} \\ \Delta \ddot{Y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \dot{X} \\ \Delta \dot{Y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Los coeficientes de cada uno de estos resortes y amortiguadores fueron obtenidos a partir de una derivación numérica de las fuerzas radiales y tangenciales (Ec. 3) obtenidas con el solver dynCav aplicando perturbaciones en el eje a partir de un determinado punto de equilibrio.

$$\begin{pmatrix} d\bar{F}_R \\ d\bar{F}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_R}{\varepsilon \partial \phi} & -\frac{f_T}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial f_T}{\varepsilon \partial \phi} & +\frac{f_R}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon \\ \varepsilon d\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial \dot{\varepsilon}/\omega} & -\frac{2f_R}{\varepsilon} \\ \frac{\partial f_T}{\partial \dot{\varepsilon}/\omega} & -\frac{2f_T}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(\dot{\varepsilon}/\omega) \\ \varepsilon d(\dot{\phi}/\omega) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Mediante el estudio realizado por San Andrés (2010), el cual aplica una serie de pasos para relacionar los coeficientes con las velocidades de giro, se obtienen las velocidades críticas para diferentes cojinetes (Ec. 4) (Ec. 5) (Ec. 6) generando así una región estable girando por debajo de la velocidad crítica y una región inestable de funcionamiento por encima de esta.

$$k_{eq} = \frac{k_{xx} c_{yy} + k_{yy} c_{xx} - k_{yx} c_{xy} - k_{xy} c_{yx}}{c_{xx} + c_{yy}} \quad (4)$$

$$(\omega_w)^2 = \frac{(k_{eq} - k_{xx})(k_{eq} - k_{yy}) - k_{xy} k_{yx}}{c_{xx} c_{yy} - c_{xy} c_{yx}} \quad (5)$$

$$\omega_t = \sqrt{\frac{k_{eq}}{(\omega_w)^2}} \quad (6)$$

donde:  $k_{eq}$  es el coeficiente de rigidez equivalente,  $\omega_w$  es razón de frecuencia de giro y  $\omega_t$  es la velocidad de giro umbral relativa. Una vez obtenidas estas regiones, se comparan transitorios de un mismo cojinete a diferentes velocidades de giro y se comprueban las regiones obtenidas.

## Resultados y discusión

Para la resolución de los temas estudiados, se presentó un modelo de cojinete con las diferentes características:

Características del cojinete	
Radio del eje	49.37 mm
Radio de la carcasa	49.37 mm + 0.9/1000 mm
Viscosidad del lubricante	0.07 Pa.s
Densidad del lubricante	860 kg/m <sup>3</sup>

Tabla 1: Características del cojinete

En primer lugar, se creó una herramienta en la plataforma Octave que realice la derivación numérica de las fuerzas para obtener los coeficientes necesarios, en cada una de las posiciones de equilibrio que presenta ese cojinete, a partir de diferentes fuerzas teóricas dimensionales y adimensionales presentadas por Szeri (2011). Una vez corroborado que los resultados son congruentes con la bibliografía, se utilizó la herramienta para resolver con fuerzas obtenidas con el solver dynCav y los resultados tuvieron muy buena concordancia. Se realizó un estudio de los coeficientes para diferentes relaciones  $L/D$  a partir del solver numérico.

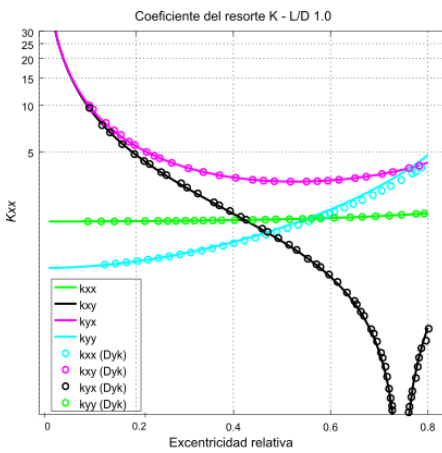


Figura 3a

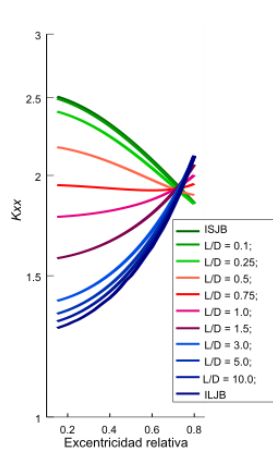


Figura 3b

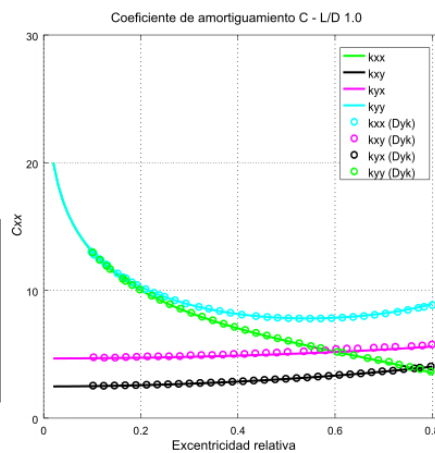


Figura 4a

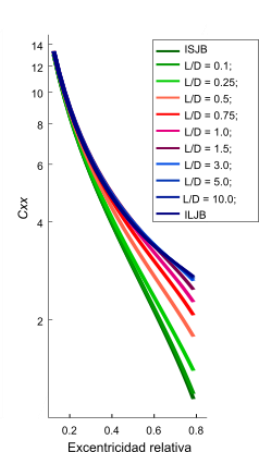


Figura 4b

Figura 3a y 4a: Coeficientes  $K$  y  $C$  para un cojinete con relación  $L/D = 1$  comparando con los presentados por Dyk (2019).

Figura 3b y 4b: Coeficientes  $K$  y  $C$  para distintas relaciones  $L/D$  obtenidos con el código desarrollado.

En la figura 3a y 4a se muestran los valores de coeficientes elásticos  $K$  y de amortiguamiento  $C$  respectivamente para un cojinete con relación  $L/D = 1$  con respecto a la excentricidad relativa comparando los resultados obtenidos con los reportados por (Dyk, 2019). En las Figuras 3b y 4b se realiza un barrido de resultados de coeficientes para diferentes relaciones  $L/D$ .

Los cojinetes con relaciones  $L/D$  pequeñas tienden a tener coeficientes similares a un cojinete infinitamente corto, y a medida que la relación aumenta, estos coeficientes tienden a igualarse a los de un cojinete infinitamente largo, lo cual permite comprobar el correcto funcionamiento del código utilizado.

Con estos coeficientes fue posible calcular la velocidad umbral de giro a partir de las ecuaciones (Ec. 4)(Ec. 5)(Ec. 6). Los resultados obtenidos fueron congruentes con los presentados por Dyk (2019) representados en la Figuras 5 y 6 con círculos. También se colocan las diferentes excentricidades relativas de equilibrio en línea de trazos para las velocidades de giro relativas, las cuales determinan junto con las velocidades umbral de giro las regiones estables e inestables de funcionamiento.

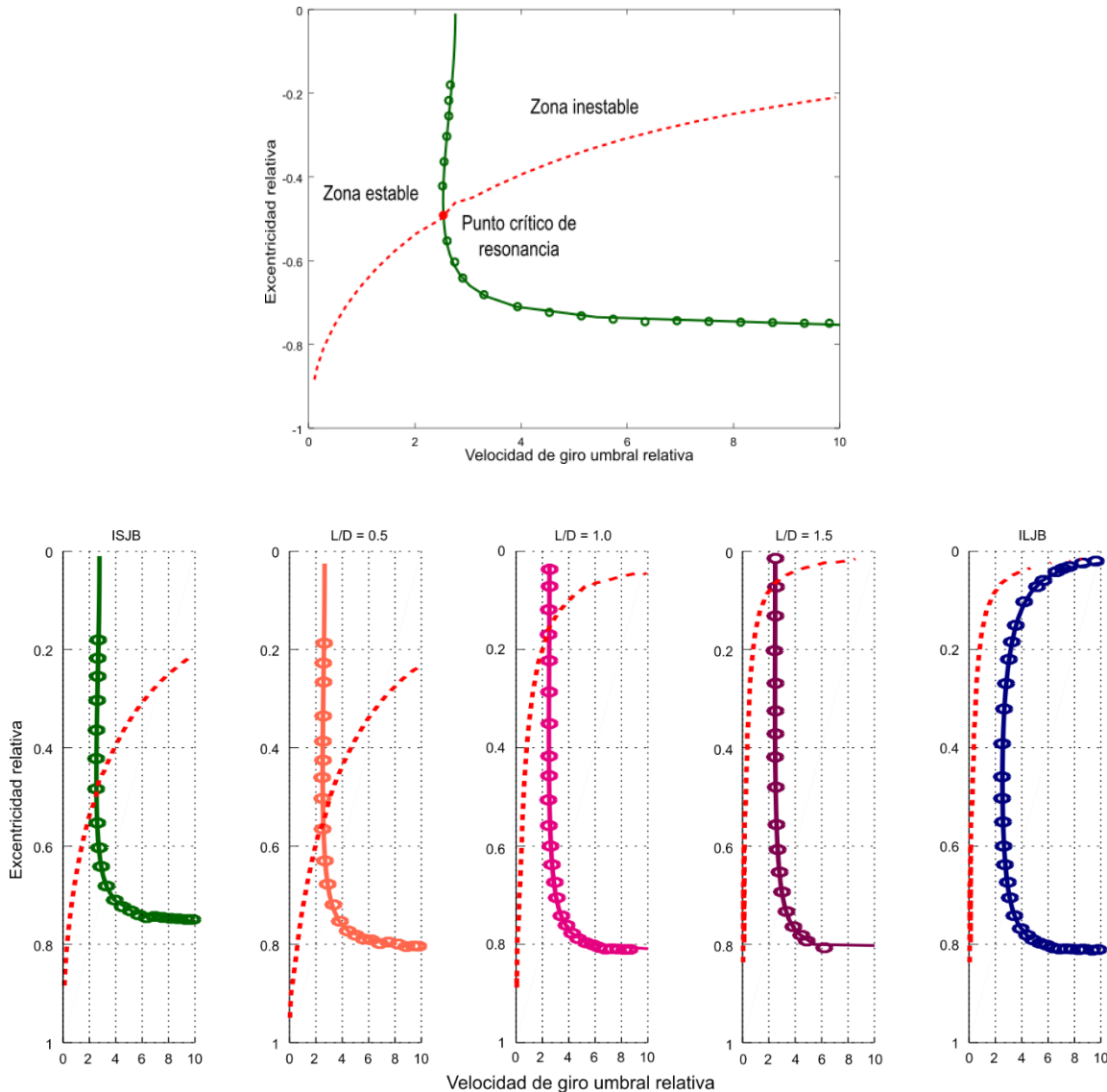


Figura 5: Zonas estables e inestables para un cojinete infinitamente corto según su velocidad de giro umbral.

Figura 6: Velocidades de giro umbral relativas para diferentes relaciones  $L/D$  representada con línea completa según la excentricidad relativa comparando con resultados presentados por Dyk (2019) representados con círculos.

Se llevó a cabo entonces el estudio del transitorio del dos cojinetes modelos con diferente relación  $L/D$  a diferentes velocidades de giro ( $\omega = \omega_r \sqrt{g/c}$ ), una ubicada en la región estable, otra en la región inestable y una en la intersección entre la velocidad umbral de giro y el punto de equilibrio llamada velocidad crítica.

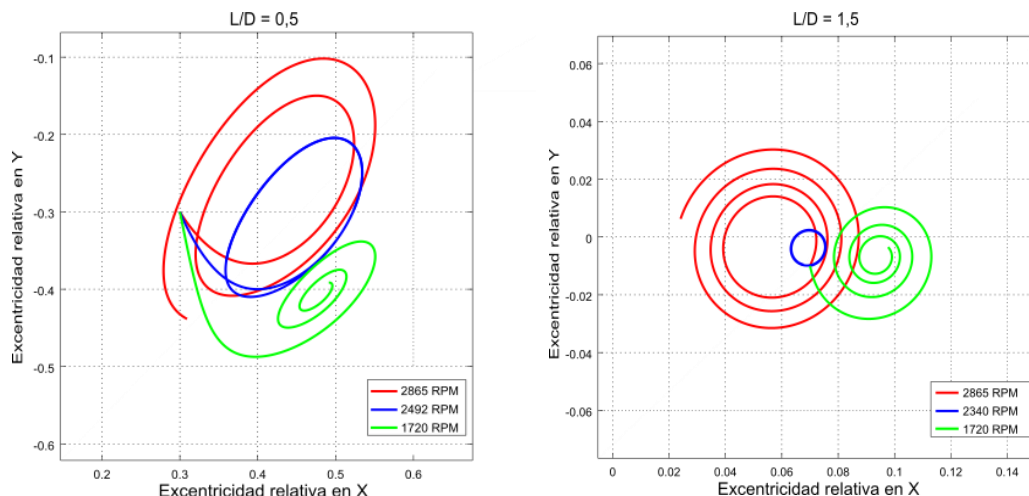


Figura 8 y 9: transitorios del mismo cojinete a diferentes RPM representando un transitorio estable en verde, uno con resonancia en azul y otro inestable en rojo.

Podemos observar cómo los resultados de los transitorios presentan concordancia según la región en la que se encuentran: con una velocidad de giro en la región estable, el cojinete converge en una posición de equilibrio; con la velocidad crítica el cojinete resuena alrededor otro punto de equilibrio y nunca converge en él; con una velocidad en la región inestable el cojinete diverge del punto de equilibrio y colapsaría al haber contacto Eje-Carcasa.

## Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos se concluye que la herramienta desarrollada en la plataforma Octave resuelve de forma satisfactoria el estudio de velocidades de resonancia y estamos en condiciones de adaptarla para el uso a casos más complejos como es el caso de texturas superficiales, cavitación y cargas dinámicas las cuales son de alta importancia para la ingeniería mecánica.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado bajo la dirección del Dr. Santiago Márquez Damián en el marco del proyecto ASTCFE0008685TC “Métodos numéricos para flujos a bajos números de Reynolds con aplicaciones en ingeniería civil y mecánica”. El trabajo cuenta con los aportes de Ángelo Rattero, Rocío I. Ribeiro, Lucas Donnet y Maximiliano Frutos becarios SCyT desde el año 2020 al 2022, y de Jorge Palavecino becario doctoral en el Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), CONICET/UNL.

## Referencias bibliográficas

- Szeri, A.Z. (2011). Fluid film lubrication. Cambridge University Press. New York, USA.
- Hamrock, B.J. (1991). Fundamentals of Fluid Film Lubrication. NASA Reference Publication.
- Dyk, Rendl, Byrtus, Smolik (2019), “Dynamic Coefficients and Stability Analysis of Finite-length Journal Bearings Considering Approximate Analytical Solutions of the Reynolds Equation”, Tribology International.
- San Andrés, L. (2010), “Dynamics of a rigid rotor-fluid film bearing system” Disponible en <[https://rotorlab.tamu.edu/me626/Notes\\_pdf/Notes05%20rigid%20rotor%20on%20JBs%2010.pdf](https://rotorlab.tamu.edu/me626/Notes_pdf/Notes05%20rigid%20rotor%20on%20JBs%2010.pdf)>
- Muszynska, A. (1988), “Stability of whirl and whip in rotor/bearing systems”, Journal of Sound and Vibration.