

Identificación de respuestas no caóticas del péndulo paramétrico mediante el primer exponente característico de Lyapunov

Identification of non-chaotic responses of the parametric pendulum using the first Lyapunov characteristic exponent

Presentación: 4 y 5 de octubre de 2022

Doctorando:

Lucas Oxarango

Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP), Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional - Argentina.
lucasojarango@frbb.utn.edu.ar

Director:

Franco E. Dotti

Codirector:

Sebastián P. Machado

Resumen

En este trabajo se estudia el comportamiento no lineal del péndulo paramétrico a partir del primer exponente característico de Lyapunov. Mediante este indicador se identifican regiones del espacio de parámetros donde coexisten respuestas rotatorias y oscilatorias. Este estudio se enmarca en una línea de investigación que apunta a extraer energía undimotriz mediante sistemas pendulares, por lo que identificar parámetros de forzamiento que originen respuestas de interés mediante métodos simples es necesario.

Palabras clave: Péndulo paramétrico, Dinámica no lineal, Exponente característico de Lyapunov, Energía undimotriz.

Abstract

In this work, the nonlinear behavior of the parametric pendulum is studied using the first Lyapunov characteristic exponent. By means of this indicator, regions of the parameter space where rotary and oscillatory responses coexist are identified. This study is part of a research line aiming to extract wave energy through pendulum systems, so identifying forcing parameters that cause responses of interest through simple methods is necessary.

Keywords: Parametric pendulum, Nonlinear dynamics, Lyapunov characteristic exponent, Wave energy.

Introducción

En los últimos años, el consumo de energía ha aumentado exponencialmente y en su mayoría se abastece a partir de recursos no renovables. Es por esto que se han desarrollado alternativas con menor impacto ambiental, donde se aprovechan recursos naturales renovables como la energía eólica, solar o movimientos de olas, cuyo objetivo final es la generación de energía a gran escala.

En el caso del movimiento de las olas, llamado energía undimotriz, ha tomado interés su aprovechamiento para generar energía mediante dispositivos *offshore*. Para esto se han estudiado distintas maneras de recolectar la energía, siendo los dispositivos pendulares una opción muy interesante (Wiercigroch, 2010; Nandakumar, et.al, 2012; Dotti & Virla, 2021). Su preferencia por sobre otras tecnologías se debe a su simplicidad constructiva y que aprovecha la dinámica no lineal intrínseca del sistema para generar energía (Yurchenko & Alevras, 2013), en vez de hacerlo batallando contra el mar. Esta característica cuenta con potencial para prolongar ostensiblemente la vida útil de los recolectores. Además se podrían utilizar dispositivos modulares, lo que permitiría construir gran cantidad de recolectores de tamaño reducido en vez de solo uno de gran tamaño, que al fallar quedaría inmediatamente fuera de servicio.

Es entonces que para el diseño de un recolector de estas características se debe comprender la dinámica no lineal del péndulo paramétrico (Leven & Koch, 1981; Clifford & Bishop, 1995; Garira & Bishop, 2003) para aprovechar al máximo las rotaciones y obtener energía. Por lo tanto una identificación de los parámetros que influyen en el sistema y una predicción de las respuestas de interés es necesaria.

En este artículo se estudia el péndulo paramétrico a partir de la evaluación del primer exponente característico de Lyapunov, donde se identifican las posibles respuestas del mismo. De esta manera, se confecciona un espacio de parámetros que permite seleccionar opciones de parámetros acorde a las condiciones de la zona marítima a instalar.

Desarrollo

El primer exponente característico de Lyapunov permite identificar si a partir de condiciones iniciales cercanas, dos trayectorias convergen o divergen luego de un tiempo de evolución. Si el exponente es positivo, las trayectorias divergen, por lo tanto la respuesta es caótica. Si es negativo, es no caótico, es decir que tiene respuestas periódicas. Cuando el exponente toma valor nulo, hay una bifurcación del comportamiento (Pietgen et.al, 1992; Strogatz, 2019 ; Moon, 1987).

Se puede definir el primer exponente de Lyapunov (λ_1) como

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{k=1}^n \ln \frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})}, \quad (1)$$

donde $d_0(t)$ representa la distancia inicial entre las dos trayectorias, n el numero de evaluaciones, y τ las evoluciones temporales.

De acuerdo con Moon (1987), se puede estimar el primer exponente de un sistema dinámico, a partir de resolver el sistema de n ecuaciones de la forma

$$\dot{x} = f(x, c), \quad (2)$$

donde x son las n variables y c los n parámetros. Luego se resuelve el sistema linealizado de la forma

$$\dot{\eta} = A \eta, \quad (3)$$

donde A representa el Jacobiano del sistema y η la separación entre trayectorias.

Por último, se estima la separación entre trayectorias de la ecuación (1) mediante la expresión

$$\frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})} = \frac{|\eta(\tau, t_k)|}{|\eta(0, t_k)|}, \quad (4)$$

donde para cada evolución temporal se normaliza el error η .

El péndulo paramétrico adimensionalizado se rige mediante la ecuación

$$\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + (1 + P \cos(\omega t)) \text{sen}(\theta) = 0, \quad (5)$$

donde β es el coeficiente de fricción, P la amplitud de forzamiento, ω la frecuencia de forzamiento y θ representa el angulo del péndulo con respecto a un eje vertical. La ecuación (5) es la que se resuelve en (2).

Resultados

Se evaluó el primer exponente para el péndulo paramétrico, haciendo un barrido de los parámetros de amplitud y frecuencia de forzamiento dejando fija la fricción a un valor de $\beta=0.1$. A partir de los valores

obtenidos, se confeccionó el espacio de parámetros de la Figura 1 donde se observan los casos de exponentes positivos, negativos y nulos.

Para el caso del primer exponente menor a cero, se filtró según si la velocidad es nula o no, para diferenciar las respuestas de reposo de las oscilatorias y rotatorias. El cero en el exponente de Lyapunov y la velocidad se consideró como un valor numérico del orden de 1×10^{-4} .

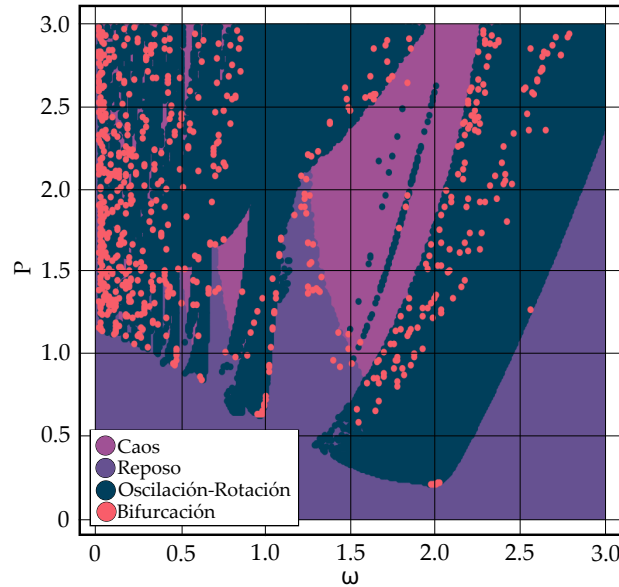


Figura 1: Espacio de parámetros para $\beta=0.1$.

Conociendo las regiones con respuestas deseadas del péndulo paramétrico, se pueden identificar los valores de parámetros P y ω para obtenerlas. Se simularon 2500 s para cada valor de amplitud y frecuencia de forzamiento, y se varió ambos con un paso de 0.01.

Considerando la región de la Figura 1 donde es mas probable obtener respuestas oscilatorias y rotatorias, se seleccionó $\omega=2$ para hacer un análisis detallado.

En la Figura 2 se pueden observar respuestas periódicas representadas mediante puntos de Poincaré sobre la proyección del espacio de fase. Este gráfico se confeccionó para $P=1$ $\omega=2$ y condiciones iniciales $\theta_0=\pi$, $\dot{\theta}_0=-1/2$ y $\theta_0=\pi$, $\dot{\theta}_0=-3$. Para el caso de la Figura 2a, la respuesta es oscilatoria, y para la Figura 2b la respuesta es rotatoria. Por lo tanto, para los mismos parámetros de forzamiento y distintas condiciones iniciales, coexisten al menos dos atractores.

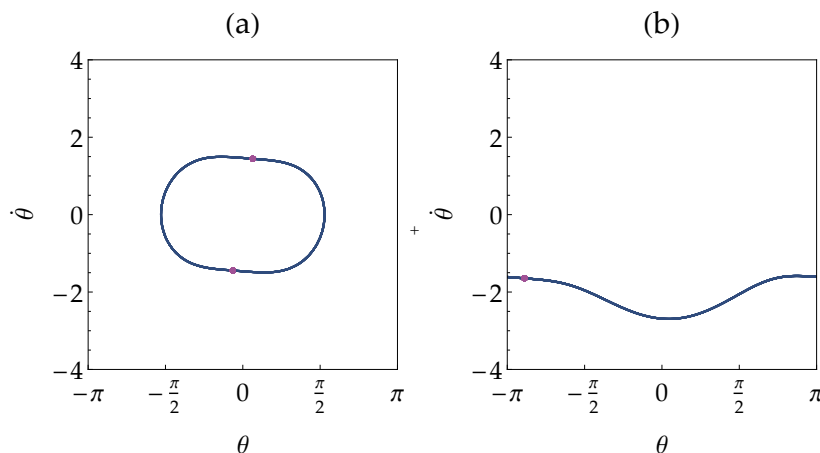


Figura 2: Proyección del espacio de fase (azul) y puntos de Poincaré (violeta) para $P=1$, $\omega=2$ y $\beta=0.1$. (a) Condiciones iniciales $\theta_0=\pi$, $\dot{\theta}_0=-1/2$ (respuesta oscilatoria). (b) Condiciones iniciales $\theta_0=\pi$, $\dot{\theta}_0=-3$ (respuesta rotatoria).

Analizando el primer exponente de Lyapunov fijando la frecuencia de forzamiento ($\omega=2$), se aprecian las zonas del mismo donde toma valores negativos y positivos, y donde este cambia de signo (Figura 3).

Al variar la amplitud de forzamiento entre 1.34 y 1.35, se observa como se produce una bifurcación de doble periodo (Figura 4). Esta se halló al analizar como varía el signo del primer exponente para $P \approx 1.35$. La Figura 4a corresponde a una rotación de periodo 1 y la Figura 4b a una rotación de periodo 2.

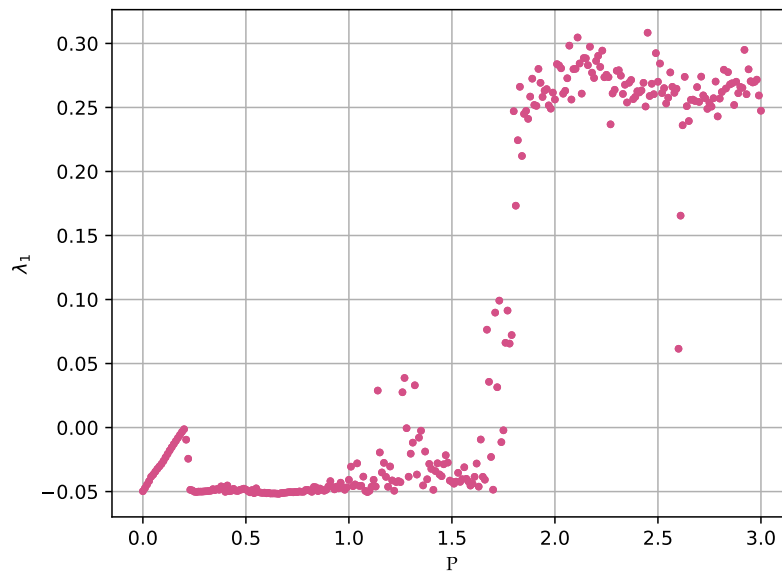


Figura 3: Variación del exponente de Lyapunov para $0 \leq P \leq 3$, $\omega=2$ y $\beta=0.1$.

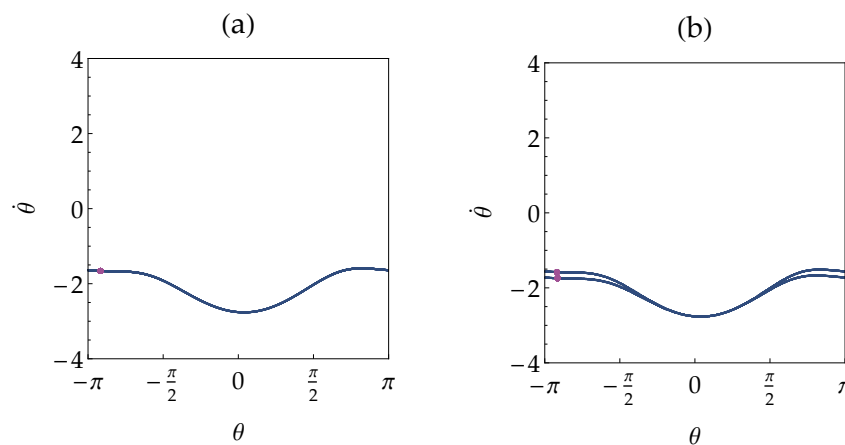


Figura 4: Proyección del espacio de fase (azul) y puntos de Poincaré (violeta), condiciones iniciales $\theta_0=\pi$, $\dot{\theta}_0=-1/2$ (respuesta rotatoria), $\omega=2$ y $\beta=0.1$. (a) Amplitud de forzamiento $P=1.34$. (b) Amplitud de forzamiento $P=1.35$.

Conclusiones

En este trabajo se identificaron valores de parámetros de forzamiento mediante el primer exponente de Lyapunov, para los cuales el péndulo paramétrico tiene respuestas no caóticas. Se ha demostrado así la utilidad del enfoque planteado sobre un sistema dinámico abordable en términos de costo computacional. No obstante, esta herramienta puede aplicarse en sistemas más complejos, permitiendo aproximaciones rápidas y confiables a rangos de parámetros que originen respuestas de interés, sin la necesidad de resolver numéricamente un espacio de parámetros o un diagrama de bifurcaciones. Cabe mencionar que esto último puede resultar prohibitivo en sistemas complejos.

Así, se prevé emplear este método en el estudio de un sistema compuesto por un grupo de varios péndulos paramétricos con transmisibilidad vibratoria, con el objeto de abordar el fenómeno de sincronización y evaluar sus posibles ventajas en términos de generación energética.

Referencias

- Clifford, M. J., & Bishop, S. R. (1995). Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters. A*, 201(2-3), 191-196. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00255-2](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00255-2)
- Dotti, F. E., & Virla, J. N. (2021). Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 16(6). <https://doi.org/10.1115/1.4050699>
- Garira, W., & Bishop, S. R. (2003). Rotating solutions of the parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 263(1), 233-239. [https://doi.org/10.1016/s0022-460x\(02\)01435-9](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(02)01435-9)
- Leven, R. W., & Koch, B. P. (1981). Chaotic behaviour of a parametrically excited damped pendulum. *Physics Letters. A*, 86(2), 71-74. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(81\)90167-5](https://doi.org/10.1016/0375-9601(81)90167-5)
- Moon, F. C. (1987). *Chaotic vibrations: An introduction for applied scientists and engineers*. John Wiley & Sons.
- Nandakumar, K., Wiercigroch, M., & Chatterjee, A. (2012). Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications*, 43, 7-14. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2012.03.003>
- Peitgen, H.-O., etc., Juergens, H., & Saupe, D. (1992). *Chaos and fractals: New frontiers of science*. Springer.
- Strogatz, S. H. (2019). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (2a ed.). CRC Press.
- Wiercigroch M. (2010). A new concept of energy extraction from waves via parametric pendulum. *UK patent application*.
- Yurchenko, D., & Alevras, P. (2013). Dynamics of the N-pendulum and its application to a wave energy converter concept. *International Journal of Dynamics and Control*, 1(4), 290-299. <https://doi.org/10.1007/s40435-013-0033-x>