

# Dispositivo de ensayo para péndulos paramétricos con vistas a la extracción de energía undimotriz

## Test device for parametric pendulums with a view on wave energy harvesting

Presentación: 4 y 5 de Octubre de 2022

Doctorando:

**Juan Nicolás Virla**

Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, Bahía Blanca  
jnvirla@frbb.utn.edu.ar

Director:

**Franco Ezequiel Dotti**

Codirector:

**Sebastián Pablo Machado**

### Resumen

Se presenta el diseño de un dispositivo de ensayos para el estudio de la dinámica de sistemas pendulares. Con base al diagrama de espacio de parámetros de amplitud y frecuencia de forzamiento externo para un sistema pendular de masas múltiples, las regiones de interés para el estudio de rotaciones son determinadas. Las características de forzamiento para un péndulo paramétrico simple son obtenidas y luego adecuadas acorde a las posibilidades de fabricación disponibles. Un mecanismo de generación del forzamiento es propuesto, y el modelo físico resultante mostrado. Se concluye que el dispositivo diseñado es adecuado para una amplia variedad de ensayos y que los requisitos de diseño son alcanzados.

Palabras clave: Péndulo paramétrico, energía undimotriz, dinámica no lineal, recolección de energía.

### Abstract

The design of a test device for the study of the dynamics of pendulum systems is presented. Based on the external forcing amplitude and frequency parameter space diagram from a multi-mass pendulum system, the regions of interest for the study of rotations are determined. The forcing characteristics for a simple parametric pendulum are obtained and then adapted according to the available manufacturing possibilities. A forcing generation mechanism is proposed, and the resulting physical model is shown. It is concluded that the designed device is suitable for a wide variety of tests and that the design requirements are met.

Keywords: Parametric pendulum, wave energy, non-linear dynamics, energy harvesting.

## Introducción

La dinámica del péndulo paramétrico ha sido estudiada extensivamente, demostrándose su riqueza como mecanismo no lineal. A su vez, los péndulos presentan la ventaja de contar con simplicidad constructiva, lo cual permite la realización de ensayos que validen los modelos matemáticos que los describen. En los últimos años, fueron las respuestas rotantes las que más llamaron la atención, debido a que resultan atractivas para la extracción de energía de medios que presentan vibraciones. En particular, existe un gran potencial en la utilización de sistemas pendulares para la extracción de energía del oleaje oceánico.

Tan solo en las líneas costeras a nivel mundial, se estima que alrededor de 1 TW de energía se encuentra disponible en el oleaje marino (Panicker, 1976), y si se considera además el oleaje en mar abierto la energía disponible se encuentra en el orden de los 10 TW (Falnes, 2007).

Estudios llevados a cabo con forzamientos externos periódicos encontraron que es relativamente sencillo obtener rotaciones en los sistemas pendulares ajustando sus parámetros con respecto a los del forzamiento externo (Lenci et al., 2011; Strzalko et al., 2012). Sin embargo, la complejidad de utilizar sistemas pendulares para la captura de energía radica en la naturaleza no lineal los mismos. En este sentido, las respuestas rotantes coexisten con el reposo, las oscilaciones, y con soluciones caóticas (Dotti et al., 2015), ninguna de las cuales es adecuada para la generación eléctrica. Si a esto se suma la estocasticidad del oleaje oceánico, y que los estados transitorios suelen ser extensos en el tiempo, queda claro que para la utilización de estos dispositivos en la generación eléctrica se vuelve necesaria la utilización de un sistema de control.

En este trabajo se muestra el proceso de determinación de las características de forzamiento de un dispositivo de generación de funciones periódicas y estocásticas que tiene como objetivo servir de plataforma de ensayo para los dispositivos pendulares diseñados con el fin de extraer energía del oleaje marino.

## Desarrollo

La altura significativa de las olas  $H_S$  se define como la altura media del tercio mayor de todas las olas observadas, y es una medida de la amplitud de excitación del forzamiento. Para la región del mar argentino cercano a la costa de Buenos Aires, este valor se encuentra dentro de un rango de  $0,5m \leq H_S \leq 2,5m$ . Por su parte, el periodo de una ola fue definido por Le Méhauté como

$$T = \sqrt{\frac{2\lambda\pi}{g \tanh(2\pi d/\kappa)}}, \quad (1)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de las olas,  $g$  es la gravedad,  $d$  es la profundidad hasta el lecho marino, mientras que  $60 \leq \kappa \leq 200$  m para olas generadas por el viento. Al utilizar la teoría lineal de olas, se permite que el dispositivo diseñado se acerque mejor al comportamiento predicho para las regiones de aguas de transición donde la energía disponible es menor, sacrificando una posible caída en la eficiencia en la generación cuando se tienen olas más energéticas.

La ecuación de onda más simple es la de Airy, que modela el oleaje en aguas donde la longitud de onda de las olas es mayor que la profundidad hasta el lecho marino. En tal caso, el perfil del oleaje está dado por

$$Y_A(t) = -H_S \cos \Omega_S t, \quad (2)$$

donde  $H_S$  es la amplitud del forzamiento y  $\Omega_S$  su frecuencia en radianes por segundo ( $\Omega_S = \Omega/2\pi$ ). Un modo de obtener este tipo de movimiento es mediante el uso de un brazo que rota sobre un eje, y en cuyo extremo se acopla un seguidor limitado a moverse dentro de una guía. Este mecanismo denominado Scotch-Yoke permite convertir un movimiento rotacional en alternativo definido por una onda senoidal pura. Una plataforma limitada al movimiento vertical acoplada a este brazo a cierta distancia del eje de rotación define el valor de  $H_S$ , mientras que la velocidad angular del brazo define  $\Omega_S$ .

El rango que se elige para  $\Omega_S$  es aproximado, ya que el oleaje marino tiene características fuertemente estocásticas. Se seleccionan sus valores en el rango  $0,5 \leq \Omega_S \leq 1$ , correspondiente tanto al oleaje presente en aguas transicionales como en aguas profundas. Esto se traduce en periodos de entre 6,3 y 12,6 segundos por ola, lo cual es representativo para el 90% del oleaje marino a nivel mundial (Gao, 2021). En particular, en la región

propuesta por (Reguera, 2016) para la instalación de los dispositivos de recolección, el rango de periodos de las olas varía entre 8 y 11 segundos, siendo este rango aproximadamente constante durante todo el año.

El dimensionado del dispositivo de forzamiento se realiza a partir de las condiciones de amplitud y frecuencia de excitación que deben ser cumplidas para alcanzar rotaciones. Partiendo de la ecuación diferencial de un sistema pendular de masas múltiples (Dotti, 2021) que puede ser inclinado respecto a la dirección vertical del forzamiento externo en un ángulo  $\alpha$ , donde además existen términos de amortiguamiento viscoso y seco, y  $b_E = \rho\delta^2/R_E$  representa el coeficiente de amortiguamiento eléctrico, se tiene

$$I\theta'' + \left(b_E + \sum_{i=1}^N l_i^2 b_i\right)\theta' + c \operatorname{sgn} \theta' + Ml_c(Y'' + g) \cos \alpha \sin \theta = 0. \quad (3)$$

Si se considera un forzamiento externo vertical con la forma de la ecuación 2, la ecuación de movimiento puede expresarse en su forma adimensional como

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \chi \operatorname{sgn} \dot{\theta} + (R \cos(\omega\tau) + \cos \alpha) \sin \theta = 0, \quad (4)$$

donde los parámetros adimensionales están definidos como  $\omega_0 = \sqrt{gMl_c/I}$ ,  $\omega = \Omega/\omega_0$ ,  $R = H\Omega^2/g$ ,  $\beta = (b_E + \sum_{i=1}^N l_i^2 b_i)/I\omega_0$  y  $\chi = c/I\omega_0^2$ . De todos estos, los de mayor interés para el diseño del dispositivo de ensayos son el parámetro  $p$  que representa la amplitud adimensional de forzamiento externo, y  $\omega$  que relaciona las frecuencias de forzamiento externo con la frecuencia natural del dispositivo pendular.

Para el diseño del dispositivo de ensayos se considera un péndulo simple, cuya frecuencia natural viene dada por la expresión  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . El espacio de parámetros adimensionales de la Figura 1 muestra las regiones donde es posible obtener rotaciones de periodo 1 del péndulo paramétrico simple, las cuales corresponden a una rotación del péndulo por cada ciclo de forzamiento externo. Estas resultan ser las más energéticas y por tanto las de mayor interés. En la misma figura se destacan también las regiones para las que es posible obtener rotaciones de periodo 2, las cuales aunque son menos energéticas, también posibilitan la extracción de energía.

Recordando que  $\omega$  es la relación que existe entre la frecuencia de excitación y la natural del péndulo, y  $R$  es la amplitud de excitación adimensional, se puede delimitar una zona entre los rangos  $0,9 \leq \omega \leq 3$  y  $0,25 \leq R \leq 2$  donde se encuentran las soluciones de mayor interés para la extracción de energía del oleaje. Con estos valores, al considerar longitudes de brazo de  $25 \leq l_1 \leq 85$  mm, cuya dimensión máxima está limitada por las capacidades de fabricación del laboratorio, y masas de entre  $15,6 \leq m_1 \leq 54,5$  g, correspondientes a cilindros de  $\varnothing=16$  mm  $h_{min}=10$  mm y  $h_{max}=35$  mm de acero con  $\rho=7752,5$  kg/m<sup>3</sup>, es directo obtener los valores equivalentes de forzamiento para alcanzar la condición dinámica deseada. La inercia para estos rangos de longitud y masa del brazo varía entre  $0,0097421 \leq I \leq 0,394165$  gm<sup>2</sup>, y se considera la inercia adimensional como  $\bar{I}=1$ .

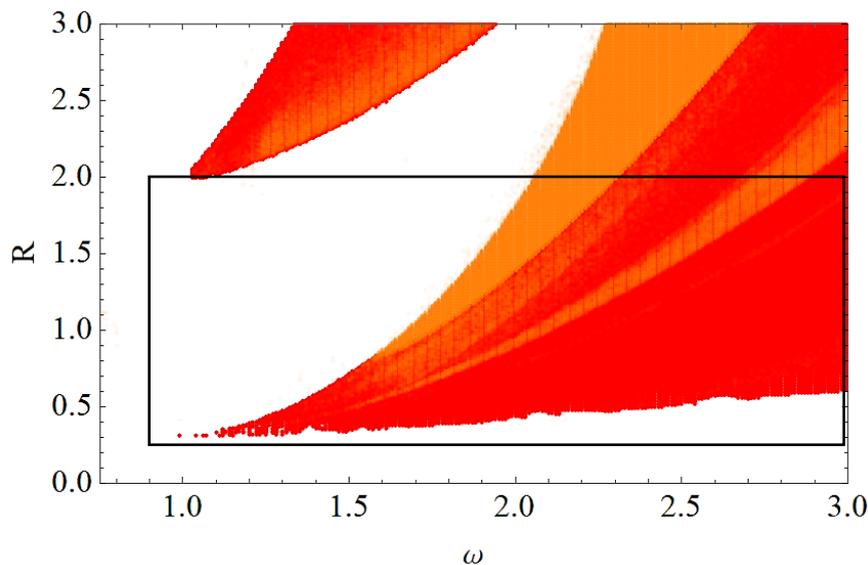


Figura 1: Regiones de parámetros para el péndulo paramétrico simple, para  $\beta = 0.1$ . En color rojo se resaltan las regiones de parámetros de forzamiento para las cuales la respuesta principal es la rotación de periodo 1. En las zonas naranjas predominan las rotaciones de periodo 2. En blanco se agrupan el resto de las respuestas, mientras que en negro se encuadra la zona de parámetros de interés para este trabajo.

	$\omega_{0min}$		$\omega_{0max}$	
	$\omega_{min}$	$\omega_{max}$	$\omega_{min}$	$\omega_{max}$
$\Omega$ (1/s)	9,67	17,83	32,23	59,43
$H_{min}$ (mm)	26,2	2,4	7,7	0,6
$H_{max}$ (mm)	209,9	18,9	61,7	5,6

Tabla 1: Amplitudes y frecuencias de forzamiento externo resultantes para distintos puntos en la región de parámetros.

Con esto, las frecuencias naturales del péndulo se encuentran en el rango  $10,74 \leq \omega_0 \leq 19,81$ . Este rango permite determinar las condiciones de forzamiento para los límites de la región de parámetros de interés. Los resultados se vuelcan en la [Tabla 1](#), donde se encuentran los límites de amplitud y velocidad angular para el desarrollo del dispositivo de ensayos.

Los rangos de ensayo de las variables del excitador se limitan entonces entre  $9,67 \leq \Omega \leq 59,43$  1/s ( $60,75 \leq \Omega \leq 373,4$  rpm) y  $0,6 \leq H \leq 209,9$  mm para la realización de ensayos de oscilaciones y rotaciones de periodo 1 y 2. Al realizar las limitaciones en base a la capacidad de fabricación disponible, se obtienen los límites de diseño del dispositivo excitador adecuados para la simulación del oleaje, los cuales son de  $5 \leq \Omega \leq 50$  1/s (o  $31,5 \leq \Omega \leq 315$  rpm) y  $1 \leq H \leq 185$  mm.

Con las limitaciones propuestas, la amplitud de forzamiento al evaluar la zona más baja de ensayo  $R=0,25$  para un péndulo simple de 85 mm de longitud es de 3,4 mm para  $\omega=2,5$ , y 26,2 mm para  $\omega=0,9$ . Por su parte, para el péndulo de brazo de 25 mm, los forzamientos resultantes varían entre 1 mm para  $\omega=2,5$  y 7,7 mm para  $\omega=0,9$ .

En el límite superior de amplitudes de ensayo  $R=1,75$ , se halla que para un péndulo simple de 85 mm los forzamientos oscilan entre 23,8 mm para  $\omega=2,5$  y 183,6 mm para  $\omega=0,9$ . Por su parte, para el péndulo de 25 mm de brazo, estos valores valen 7 mm para  $\omega=2,5$  y 54 mm para  $\omega=0,9$ .

Al considerar que la frecuencia natural de un sistema de masas múltiples es menor a la del péndulo simple, es de esperar que esta amplitud resulte ser mayor, permitiendo ensayos de bajos valores de R utilizando amplitudes de mayor magnitud.

## Resultados

A partir de los límites considerados, se diseñó el dispositivo mostrado en la [Figura 2](#). Una estructura rígida sostiene las 4 guías de la plataforma móvil, que se ve limitada a movimientos verticales, y sobre la cual se montan los sistemas pendulares a ensayar. A cada lado de dicha plataforma, un motor de paso a paso se acopla al eje sobre el que rota el brazo de excitación. Este permite seleccionar la amplitud del forzamiento en el rango de 1 a 185 mm, lo cual proporciona amplitudes de pico a pico de ensayo de entre 2 y 370 mm.

Mediante un programa de control desarrollado en la plataforma Arduino, se controlan ambos motores en sentido de rotación inverso, y se acoplan entre si mediante un mecanismo de correas y poleas para asegurar la sincronización de ambos brazos.

El programa de control permite controlar el movimiento asignando velocidades de rotación y duraciones de ensayos para velocidades constantes, como así también la realización de revoluciones completas con tiempos de reposo aleatorios entre forzamientos para la mejor simulación del movimiento del oleaje.



Figura 2: Dispositivo de ensayo ensamblado. A la izquierda se muestra el dispositivo completo con un sistema pendular fijado para la realización de ensayos. En el centro se muestra el brazo excitador con su respectiva correa de sincronización. A la derecha se puede ver el motor de paso a paso montado en el soporte de acoplamiento.

## Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un dispositivo para la realización de ensayos de forzamiento para sistemas pendulares pensados como dispositivos convertidores de la energía undimotriz. El dispositivo permite la realización de los ensayos en las regiones de parámetros donde predominan las rotaciones, con la finalidad de verificar los modelos matemáticos estudiados. En particular, actualmente se encuentra en estudio la implementación de un dispositivo que permite realizar una acción de control en el sistema pendular mostrado en la [Figura 2](#). La principal ventaja de este equipo de ensayo es que permite estudiar la dinámica de los sistemas pendulares sometidos a forzamiento estocástico, que asemeja en mejor modo al oleaje marino y permite verificar la capacidad de la acción de control de obtener soluciones rotantes, disminuyendo al mismo tiempo los estados transitorios.

## Referencias

Dotti F., Reguera F., & Machado S. (2015). "A review on the nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting", *PANACM 2015 First Pan-American Congress on Computational Mechanics*

Dotti, F., & Virla, J. (2021). "Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*.  
<https://doi.org/10.1115/1.4050699>

Falnes, J. (2007). "A review of wave-energy extraction", *Marine Structures*, 20(4), 185–201.  
<https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2007.09.001>

Gao, H., Liang, B., & Shao, Z. (2021). "A global climate analysis of wave parameters with a focus on wave period from 1979 to 2018", *Applied Ocean Research*, 111(102652), 102652.  
<https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.102652>

Panicker, N. N. (1976). "Power resource estimate of ocean surface waves", *Ocean Engineering*, 3(6), 429–439. [https://doi.org/10.1016/0029-8018\(76\)90016-0](https://doi.org/10.1016/0029-8018(76)90016-0)

Reguera et. Al., (2017). "Sistemas pendulares de masas múltiples y su aplicación a la extracción de energía undimotriz en el mar argentino", *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*. 20, 1431-1454.

Strzalko, J., Grabski, J., Wojewoda, J., Wiercigroch, M., & Kapitaniak, T. (2012). "Synchronous rotation of the set of double pendula: experimental observations", *Chaos (Woodbury, N.Y.)*, 22(4), 047503.  
<https://doi.org/10.1063/1.4740460>