

Dinámica no lineal de vigas piezoeléctricas pandeadas producto de cargas axiales para aplicaciones de recolección de energía

Nonlinear dynamics of post-buckled piezoelectric beams due to axial loads for energy harvesting applications

Presentación: 4 y 5 de Octubre de 2022

Doctorando:

Santiago Manuel Osinaga

Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional - Argentina.
smosinaga@frbb.utn.edu.ar.com

Director:

Sebastián Pablo Machado

Codirector:

Mariano Febbo

Resumen

En este trabajo, estudiamos numérica y experimentalmente la generación de energía de un recolector piezoeléctrico sometido a una carga axial estática. Esta fuerza aplicada permite alterar la frecuencia natural del dispositivo, lo cual lo hace altamente atractivo para conseguir su funcionamiento en estado de resonancia del mismo, maximizando su rendimiento. Para llevar a cabo nuestro estudio, obtenemos una solución reducida al complejo modelo analítico que contempla fuentes de no linealidad inercial, geométricas y constitutivas para el material piezoeléctrico, acorde al Método de Escalas Múltiples (MEM). Esta solución es comparada con los resultados experimentales obtenidas en condiciones de laboratorio mostrando buena correlación. Nuestros hallazgos numéricos y experimentales obtenidos, confirman que es posible variar la frecuencia natural del dispositivo mediante una correcta elección de la carga axial. Además, identificamos claramente los comportamientos no lineales de endurecimiento y ablandamiento para los estados de pre- como post-pandeo respectivamente.

Palabras clave: Recolección de energía, Piezoelectricidad, Pandeo, Dinámica no lineal.

Abstract

In this work, we numerically and experimentally study the voltage generation of a piezoelectric energy harvester subjected to a static axial load. This applied force offers the possibility to modify the natural frequency of the device, which makes it highly attractive to achieve its operation in its resonance condition, maximizing its performance. In order to carry out our study, we obtained a reduced solution for the complex analytical model, that contemplates non-linearity sources arising from inertial, geometric and constitutive relations for the piezoelectric material, according to the Multiple Scales Method (MSM). We compared the aforementioned solution with experimental results obtained under laboratory conditions showing good correlation. The numerical and experimental findings confirmed the possibility of varying the natural frequency of the device through a correct choice of axial load. Moreover, we could clearly identify the hardening and softening nonlinear behaviors for the pre- and post-buckling states, respectively.

Keywords: Energy Harvesting, piezoelectricity, Buckling, Nonlinear dynamics.

Introducción

En la última década, la recolección de energía mediante la utilización de materiales piezoeléctricos ha capturado la atención por parte de la comunidad científica (Fu y col., 2021). En este proceso, parte de la energía presente en el medio ambiente que se disiparía sin ser aprovechada en forma de tensiones o vibraciones, es convertida en energía

con el propósito de alimentar sensores electrónicos de bajo potencia para lograr su autonomía energética(Liu y col., 2018). En particular la piezoelectricidad posee ciertas ventajas frente a otros mecanismos de transducción como la electrostática o magnética, como su mayor densidad de potencia y capacidad capacidad de generar energía de manera espontanea(Cook-Chennault y col., 2008). No obstante, los recolectores de energía piezoeléctricos actualmente poseen ciertos inconvenientes que aún no han sido resueltos.

El diseño de los recolectores de energía para fuentes vibratorias está basado en el fenómeno de resonancia, el cual se produce cuando la frecuencia de excitación Ω se aproxima a alguna las frecuencias naturales del dispositivo ω_n . Este fenómeno, esta caracterizado por la maximización de la amplitud de los desplazamientos y por lo tanto también de la generación de voltaje, impactando altamente en el rendimiento del mismo. Sin embargo, tan pronto como el valor de Ω se aleja del valor de ω_n un decremento del rendimiento del dispositivo es comúnmente observado. Por otro lado, diversas fuentes de vibración presentes en el medio ambiente poseen bajos valores de frecuencia de excitación. Esto implica una gran dificultad al diseño de recolectores de energía imponiendo bajos ω_n .

Con el fin de dar solución a estos problemas una de las técnicas más relevantes propuestas consiste en la aplicación de una carga axial estática en uno de los extremos de un recolector de energía tipo viga(Chen y col., 2020; Masana y col., 2011). Este enfoque, permite disminuir la frecuencia natural del dispositivo a medida que la carga axial aumenta hasta alcanzar un valor crítico denominado carga de pandeo (estado de pre-pandeo), donde la frecuencia natural se vuelve nula(Wang y col., 2004). A partir de este punto, si la carga axial sigue aumentando la estructura experimenta un desplazamiento fuera del plano transversal, acompañado de un incremento en la frecuencia natural (estado de pos-pandeo). En estos dos estados, si bien el comportamientos dinámicos es diferente, existe la posibilidad de sintonizar la frecuencia de excitación con la frecuencia natural mediante la variación de de la carga axial, lo cual lo hace un diseño prometedor para resolver los problemas previamente mencionados.

En este contexto, en este trabajo estudiamos numérica y experimentalmente la dinámica no lineal de una viga piezoeléctrica sometida a una carga axial estática. Un modelo analítico es formulado acorde a una teoría de vigas esbeltas considerando fuentes de no linealidad inercial, geométricas y constitutivas piezoeléctricas. Las ecuaciones a derivadas parciales del movimiento son discretizadas acorde al método de Galerkin y una solución reducida es desarrollada en base al Método de Escalas Múltiples (MEM). Un dispositivo experimental es fabricado y ensayado en condiciones de laboratorio considerando tanto los regimenes de pre- como pos-pandeo. Los resultados numéricos muestran la utilidad del modelo aquí presentado así como las diferentes bondades para la generación de energía asociadas a cada estado.

Modelo matemático

Considerando la teoría de vigas de Bernoulli-Euler, la ecuación del desplazamiento transversal $w_d(x, t)$ alrededor de una configuración pre-deformada $w_s(x)$ para el dispositivo esquemáticamente representado en la Fig 1a es(Osinaga y col., 2022)

$$m\ddot{w}_d + \nu \frac{\partial}{\partial t} (w'_d \dot{w}_d') + c_1 \dot{w}_d + c_2 \dot{w}_d |\dot{w}_d| + P\alpha w_d'' - \frac{1}{2} k_c \alpha (w_s'' + w_d'') \left(\int_0^L (w_s' + w_d')^2 dx \right) dx + EI w_d^{IV} + \Theta'' v + [\Theta_g (w_s' + w_d')] v + \Psi v (w_s^{IV} + w_d^{IV}) \operatorname{sgn}(w_s'' + w_d'') + EJ_n [(w_s'' + w_d'')^2]'' \operatorname{sgn}(w_s'' + w_d'') = -m\ddot{g}. \quad (1)$$

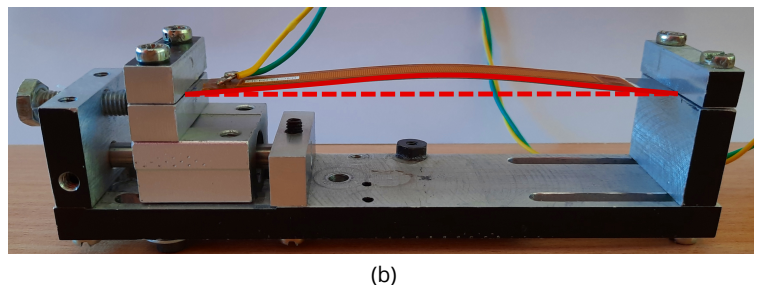
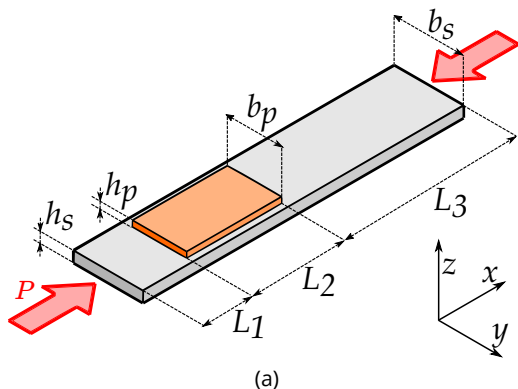


Figura 1: Viga piezoeléctrica ensayada. (a) Esquema con dimensiones más relevantes, (b) Muestra real en configuración de pos-pandeo (línea roja continua) contra su configuración inicialmente recta (línea roja discontinua)

Donde la función $w_s(x)$ es obtenida resolviendo el problema de pandeo estático no lineal, incluyendo el calculo del valor de carga crítica como modo de pandeo(Nayfeh y col., 2008). La otra incognita del sistema esta representada por el voltaje $v(t)$ generado por el material piezoeléctrico. Por otro lado, diversos parámetros son encontrados en la Ec. 1 donde m representando la masa por unidad de longitud de la viga, ν un parámetro asociado a la inercia no lineal y proveniente de la expansión en series de Taylor del campo de desplazamientos, c_2 y c_3 siendo los coeficientes de amortiguamiento lineal y no lineal (cuadrático) respectivamente, P denota a la carga axial estática aplicada, EI la rigidez seccional flexional, mientras que Θ y Θ_g son los acoplamientos electromecánicos lineal y no lineal geométrico respectivamente. Por otro lado, los parámetros dependientes de las constitutivas no lineales del material piezoeléctrico son: EJ_n denotando la rigidez seccional no lineal flexional y Ψ el acoplamiento no lineal constitutivo. Por otro lado, los parámetros dependientes de la condición de borde no ideal son: k_c correspondiente al valor de la constante elástica del extremo, mientras que $\alpha = E_j A_j / \zeta_j$ es un parámetro adimensional que varia entre 0 y 1 donde ζ_j es una rigidez axial modificada del j -ésimo segmento(Osinaga y col., 2021). Por último, la excitación al sistema expresada como una excitación de base esta dada por la función determinística del tiempo $g(t)$, la cual será asumida sinusoidal. Pasando a la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento eléctrico del sistema, la misma puede ser expresada como

$$C_p \dot{v} + \frac{v}{R} - \int_{L_p} \left[\Theta_1 \frac{\partial}{\partial t} (w_s'' + w_d'') - \Theta_0 \frac{k_c}{2\zeta} \int_{L_p} (w_s''^2 + w_d''^2) dx \right] dx - \int_{L_p} \frac{\Psi_2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_s''^2 + w_d''^2) \text{sgn}(w_s'' + w_d'') dx = 0. \quad (2)$$

Donde C_p es la capacidad del material piezoeléctrico y R la resistencia eléctrica conectada a la viga piezoeléctrica. Por último, $L_p = L_2$ es usado para indicar el dominio en la coordenada x donde se encuentra el material piezoeléctrico.

Con el fin de encontrar una solución a las Ecs. (1) y (2) el método de Galerkin o expansión modal es utilizado. De esta forma, el desplazamiento transversal de la viga piezoeléctrica puede ser expresado como una combinación lineal de N modos de vibración en conjunto con sus coordenadas generalizadas $q_i(t)$

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x), \quad (3)$$

Donde $\phi_i(x)$ son los modos de vibración de la viga los cuales son obtenidos resolviendo el problema de vibraciones libres considerando la configuración pre-deformada(Nayfeh y col., 2008). Asumiendo excitaciones armónicas y cerca de la frecuencia natural del sistema, el comportamiento dinámico puede ser descrito considerando solamente el modo fundamental de vibración. En este caso, las ecuaciones discretizadas del tiempo puede ser obtenidas reemplazando la Ec. (3) en (1) y (2) para $N = 1$

$$\ddot{q} + \chi (\dot{q}^2 + q\ddot{q}) + \omega^2 q + \mu_2 \dot{q} + \mu_3 \dot{q}^2 \text{sgn}(\dot{q}) + K_G^s q^2 + K_G q^3 + K_C^s q \text{sgn}(q) + K_C q^2 \text{sgn}(q) + v [\theta + \theta_G^s + \theta_C^s \text{sgn}(q) + \theta_G q + \theta_C q \text{sgn}(q)] = -F \cos(\Omega t) \quad (4)$$

$$C_p \dot{v} + \frac{v}{R} - (\psi - \psi_G^s) \dot{q} + \psi_G q \dot{q} - \psi_C^s \dot{q} \text{sgn}(q) - \psi_C^s q \dot{q} \text{sgn}(q) = 0 \quad (5)$$

Donde ahora la información espacial del problema es condensada en los parámetros modales. En este punto, resulta importante resaltar que aquellos que poseen un superíndice s representan a aquellos que toman valores no nulos solamente para valores al valor de $P > P_{crit}$ siendo P_{crit} la carga crítica de pandeo lateral(Wang y col., 2004).

Dentro de los distintos métodos de perturbación utilizados para obtener soluciones analíticas aproximadas a ecuaciones diferenciales no lineales, el Método de Escalas Múltiples (MEM) ha sido elegido como método de reducción por ser uno de los más apropiados para analizar la respuesta dinámica tanto para vigas en régimen de pos-pandeo como para recolectores piezoeléctricos en configuración cantilever, o sometidos a cargas axiales. Siguiendo este método, la variable independiente temporal es expandida en n nuevas variables teniendo la forma: $T_n = \varepsilon^n t$, donde ε es un parámetro de contabilidad adimensional. Las funciones $q(t)$ y $v(t)$ deben ser expandidas acorde este parámetro como

$$q(t) \approx q_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon q_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2), \quad (6)$$

$$v(t) \approx v_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon v_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 v_2(T_0, T_1, T_2). \quad (7)$$

De esta manera, reemplazando las Ecs. (6) y (7) en las Ecs. (4) y (5), y agrupando términos acorde a las distintas potencias de ε , un total de $2n$ ecuaciones diferenciales a derivadas parciales pueden ser obtenidas. En esta técnica, es posible resolver las escalas de tiempo más lentas y luego introducirlas en las más rápidas. Luego, mediante la identificación de términos seculares en cada escala y su igualación a cero, las condiciones de solución pueden ser obtenidas.

Operando de esta forma, es posible obtener la siguiente solución reducida para el desplazamiento generalizado de la viga (Osinaga y col., 2022)

$$a^2 \left(\frac{D_2}{2} + aD_3 \right)^2 + \left[a^3 K_G + a^2 K_C - a \left(\frac{K}{2} - \sigma \right) \right]^2 = \mathcal{F}. \quad (8)$$

Donde a es la amplitud de la respuesta armónica de la coordenada $q(t)$ mientras que σ es el parámetro de sintonización obtenido de la diferencia de la frecuencia de excitación Ω y natural del sistema ω . Adicionalmente, una serie de parámetros fueron elegidos para simplificar la expresión de la solución

$$\begin{aligned} D_2 &= \mu_2 - \frac{R\psi(\theta + \theta_G^s)}{C_p^2 R^2 \omega^2 + 1}, & D_3 &= \frac{4\mu_3 \omega}{3\pi} + \frac{2\theta_C \sin(\eta)}{3\pi \omega}, & K &= \frac{R\psi(\theta + \theta_G^s)}{C_p^2 R^2 \omega^2 + 1}, \\ K_C &= \frac{4K_C}{3\pi \omega} + \frac{4\theta_C \cos(\eta)}{3\pi \omega}, & K_G &= \frac{3K_G}{8\omega} + \frac{5K_G^s \chi}{24\omega} - \frac{5K_G^{s2}}{12\omega^3} - \frac{\chi^2 \omega}{4}, & \mathcal{F} &= \frac{g^2}{4\omega^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Donde cada uno de ellos posee un significado físico: D_2 representa un amortiguamiento lineal efectivo, afectado por el amortiguamiento estructural (de la portante y piezo) y el efecto piezoeléctrico lineal y no lineal geométrico. D_3 representa un amortiguamiento no lineal efectivo, afectado por el amortiguamiento no lineal piezoeléctrico y el efecto piezoeléctrico no lineal constitutivo. K representa el amortiguamiento piezoeléctrico, mismo término que se encuentra restando en D_2 . K_C representa la no linealidad constitutiva efectiva, donde K_C depende de la rigidez y θ_C del acoplamiento. K_G representa la no linealidad geométrica efectiva, donde K_G^s es la rigidez no lineal de orden 2, K_G la de orden 3 y χ el término dependiente de la inercia no lineal. \mathcal{F} representa al forzamiento introducido al sistema.

La expresión dada por la Ec. (8) representa a la respuesta en estado estacionario del sistema. En esta expresión, podría probarse que para cierta configuración de parámetros, existe más de una solución de a para ciertos valores de σ , una propiedad típica de los sistemas no lineales donde el valor de amplitud depende de los valores de las condiciones iniciales. Por último, la solución temporal del voltaje puede ser expresada como una suma infinita de armónicos como

$$v(t) = V \cos(\Upsilon_1) + V^G \cos(\Upsilon_2) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^C \cos(\Upsilon_n), \quad (10)$$

donde las amplitudes de los armónicos quedan determinados por

$$V = aR\omega\varphi_1(\psi + \psi_G^s), \quad V^G = a^2 R\omega\varphi_2 \left[\psi_G^s + \frac{(\psi + \psi_G^s)(K_G^s - 2\chi\omega^2)}{\omega^2} \right], \quad V_n^C = a^2 R\omega\varphi_n(a_n\psi_C + b_n\psi_C^s), \quad (11)$$

siendo $\varphi_i = (1 + i^2 C_p^2 R^2 \omega^2)^{-1/2}$. Por otro lado, los argumentos de las funciones trigonométricas, dependientes del tiempo son $\Upsilon_i = i(\Omega t - \gamma) + \eta_i$, donde $\eta_i = -\arctan(-kC_p R\omega)$.

Procedimiento experimental

Con el fin de validar el modelo aquí presentado la muestra de la Figura 1b fue elegida. La misma, esta conformada por un parche piezoeléctrico comercialmente distribuido bajo el nombre Macro Fiber Composite (MFC) y fabricada por Smart Materials, adosada a una portante de acero. Como puede observarse, un tornillo fue utilizado para inducir la pre-carga axial en el extremo de la viga. En el estado presentado puede notarse la configuración pre-deformada de la viga, donde las líneas discontinuas representan a la inicialmente recta. Este estado, es debido a la carga axial la cual tomó un valor mayor a la crítica de pandeo. En lo referido a las dimensiones geométricas, las mismas fueron de (véase Fig. 1a): $L_1 = 12\text{mm}$, $L_3 = 17.5\text{mm}$, $L_2 = L_p = 85\text{mm}$, $b_s = 12.7\text{mm}$, $b_p = 7\text{mm}$, $h_s = 0.381\text{mm}$ y $h_p = 0.3\text{mm}$. El desplazamiento de base fue impuesto de manera armónica a la muestra utilizando un excitador electromecánico Labworks Inc. ET-132 en conjunto con un generador de funciones RIGOL DG4062 cuya señal de salida fue amplificada por un amplificador fabricado por técnicos de CONICET pertenecientes al Centro Científico Tecnológico Bahía Blanca. A fines de medir la excitación de base que sufren las muestras, un acelerómetro piezoeléctrico PCB Piezotronics 352C68 fue situado en la base de las mismas. Por otro lado, el parche piezoeléctrico MFC fue conectado a una resistencia eléctrica, sobre la cual se midió la generación eléctrica. Ambas señales correspondientes al acelerómetro y piezoeléctrico fueron adquiridas por una placa adquisidora NI 9230. Por último, una celda de carga piezorresistiva TE Connectivity FX-29, alimentada por una placa Arduino UNO fue utilizada para medir la carga axial a la que se estaba sometiendo el recolector de energía.

Resultados

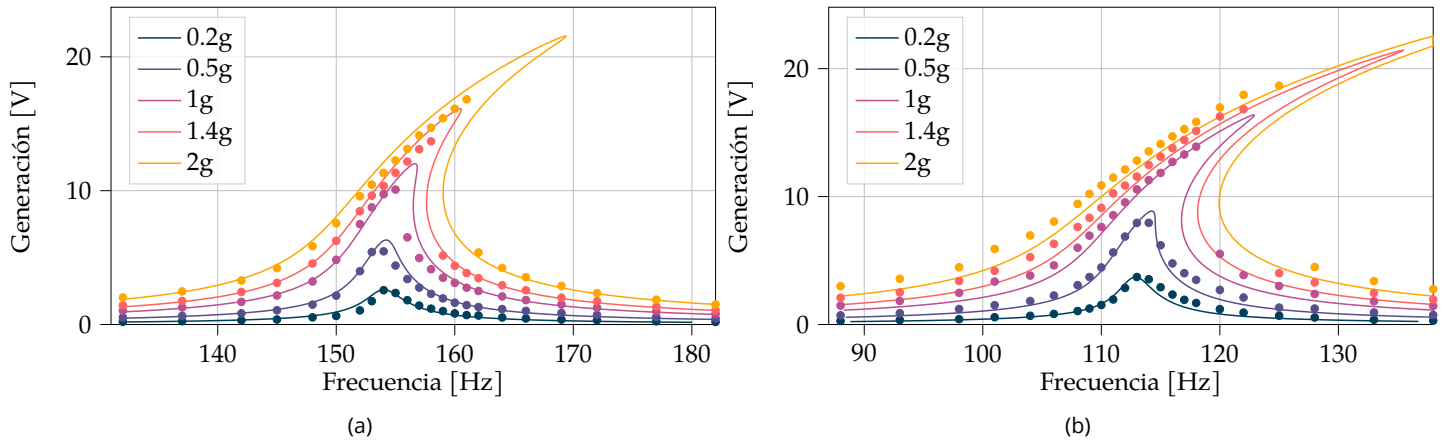


Figura 2: Generación de voltaje del recolector de energía. Estado de pre-pandeo. Puntos representan resultados experimentales mientras que líneas continuas predicciones de la solución reducida del MEM: (a) $P = 0$ y (b) $P = 36\text{N}$. ($P_{crit} = 64\text{N}$)

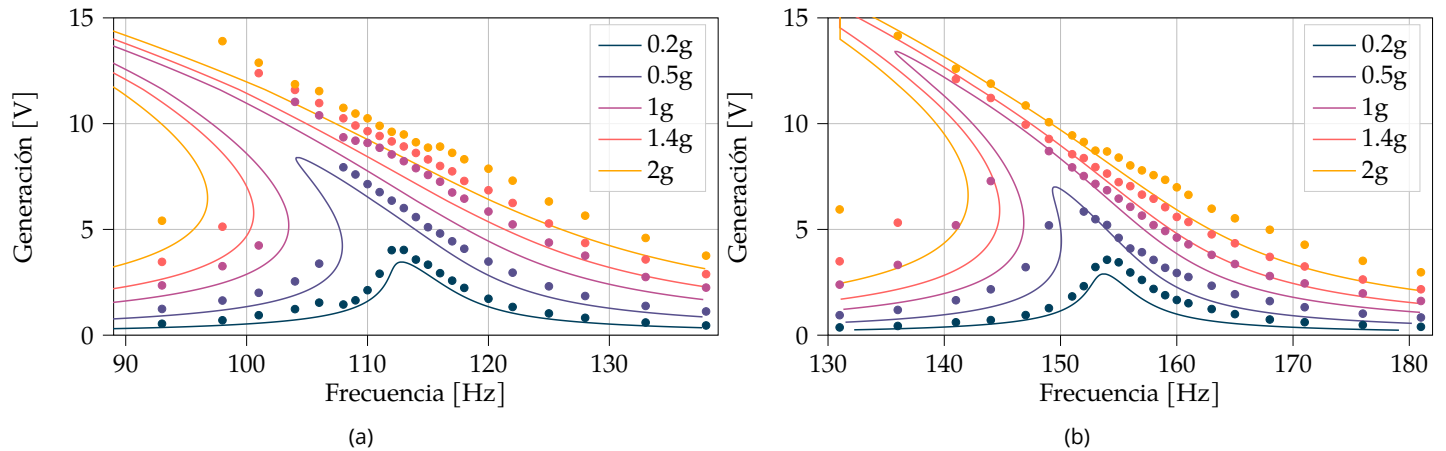


Figura 3: Generación de voltaje del recolector de energía. Estado de pos-pandeo. Puntos representan resultados experimentales mientras que líneas continuas predicciones de la solución reducida del MEM: (a) $P = 81\text{N}$, (b) $P = 95\text{N}$ ($P_{crit} = 64\text{N}$).

La Figura 2 muestra los resultados numéricos y experimentales asociados al estado de pre-pandeo. Primero, la Figura 2a muestra los resultados sin ningún tipo de carga axial aplicada ($P = 0$). En este caso, un efecto de endurecimiento fue identificado donde los valores de frecuencia asociados a los valores picos de generación fueron desplazados hacia la derecha a medida que la excitación de base aumentaba. Este comportamiento, ocurrió matemáticamente debido a la presencia de la rigidez no lineal geométrica de orden cubico K_G , donde como puede ser observado, el modelo analítico fue capaz de reproducir perfectamente los resultados experimentales. Por otro lado, los efectos asociados al decrecimiento global de la rigidez de la estructura por la carga axial, así como el más notorio efecto de endurecimiento por el incremento de los desplazamientos fueron confirmados como puede observarse en la Figura 2b, cuando la misma muestra fue sometida a una carga axial de $P = 36\text{N}$ y su frecuencia natural fue disminuida de 154Hz a 115Hz . Respecto al voltaje generado en el estado de pre-pandeo, el caso con carga axial no nula presentó un mejor rendimiento debido a los valores picos levemente más altos, mayor ancho de banda de generación, así como la capacidad de recolectar energía para valores de frecuencia natural más bajos.

Los resultados numéricos y experimentales de la misma muestra en el estado de pos-pandeo ($P > P_{crit}$) se encuentran presentados en la Figura 3. Primero, la Figura 3a presenta la respuesta en estado permanente del voltaje obtenidas para $P = 81\text{N}$. Para dicho nivel de carga axial, el estado recíproco al asociado al estado de pre-pandeo con $P = 36\text{N}$ (véase Figura 2b) fue alcanzado teniendo aproximadamente los mismos valores de frecuencia natural a bajas aceleraciones de 115Hz . En la Figura 3a, un comportamiento de ablandamiento fue ahora predicho de los resultados analíticos y experimentales. Este comportamiento, ocurre debido a la presencia de la rigidez no lineal geométrica de

orden cuadrático K_G^s , emergente de la configuración pre-deformada w_s . El segundo estado de pos-pandeo estudiado corresponde a $P = 95\text{N}$ y se encuentra presentado en la Figura 3b, el cual fue el caso recíproco al caso $P = 0$, teniendo ambos frecuencias naturales de aproximadamente 154Hz para bajas frecuencias (véase Figura 2a). En este punto, se puede realizar el mismo análisis que el anterior sobre el efecto de endurecimiento en estado de pre-pandeo y de ablandamiento en estado de pos-pandeo.

Comparando el rendimiento entre ambos estados, se puede notar que si consideramos bajas amplitudes de excitación ($< 0.2g$), la configuración de pos-pandeo es preferida debido a los valores picos más altos así como mejor generación fuera de resonancia, característica íntimamente asociada a la banda operacional del dispositivo. Por otro lado, cuando la amplitud de excitación tendió a aumentar, esta comparativa no resultó tan clara: si solo los valores picos del voltaje son observados, la viga recta (pre-pandeo) claramente sobrepasó en aproximadamente un 30% a la pre-deformada. Esto sugiere, que para fuentes de energía con frecuencias dominantes bien definidas, el estado de pre-pandeo puede ser la opción más apropiada. Sin embargo, si bandas de operación más anchas son requeridas, la generación fuera de resonancia debe ser tenida en cuenta. En este caso, el estado de pos-pandeo demostró un mejor rendimiento

Conclusiones

En este trabajo un modelo analítico de un recolector de energía piezoeléctrico sujeto a una carga axial, valido tanto para los estados de pre- como pos-pandeo fue presentado. Además, una solución reducida acorde al Método de Escalas Múltiples (MEM) fue desarrollada y comparada con resultados experimentales de una muestra piezoeléctrica conformada por un parche piezoeléctrico adosado a una portante metálica. Basados en los resultados numéricos y experimentales, la variación de la frecuencia natural durante los dos estados a medida que la carga axial era variada fue confirmada. Adicionalmente, un comportamiento de endurecimiento o ablandamiento fue identificado para los estados de pre- como pos-pandeo respectivamente. Si se desea maximizar la generación de energía a una dada frecuencia, la configuración de pre-pandeo resulta la más adecuada. Por el contrario, si se desea una generación de energía alta en una banda de frecuencias, debe considerarse una configuración de pos-pandeo.

Referencias

- Chen, Y., & Yan, Z. (2020). Nonlinear analysis of axially loaded piezoelectric energy harvesters with flexoelectricity. *International Journal of Mechanical Sciences*, 173, 105473. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105473>
- Cook-Chennault, K. A., Thambi, N., & Sastry, A. M. (2008). Powering MEMS portable devices - A review of non-regenerative and regenerative power supply systems with special emphasis on piezoelectric energy harvesting systems. *Smart Materials and Structures*. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/17/4/043001>
- Fu, H., Mei, X., Yurchenko, D., Zhou, S., Theodossiades, S., Nakano, K., & Yeatman, E. M. (2021). Rotational energy harvesting for self-powered sensing. *Joule*. <https://doi.org/10.1016/j.joule.2021.03.006>
- Liu, H., Zhong, J., Lee, C., Lee, S.-W., & Lin, L. (2018). A comprehensive review on piezoelectric energy harvesting technology: Materials, mechanisms, and applications. *Applied Physics Reviews*, 5(4), 041306. <https://doi.org/10.1063/1.5074184>
- Masana, R., & Daqaq, M. F. (2011). Relative performance of a vibratory energy harvester in mono-and bi-stable potentials. *Journal of Sound and Vibration*, 330(24), 6036-6052. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.07.031>
- Nayfeh, A. H., & Emam, S. A. (2008). Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams. *Nonlinear Dynamics*, 54(4), 395-408. <https://doi.org/10.1007/s11071-008-9338-2>
- Osinaga, S., Febbo, M., & Machado, S. (2021). Effect of elastic restraints in the modeling of prestressed piezoelectric energy harvesters. *Applied Mathematical Modelling*, 101, 573-585. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.09.010>
- Osinaga, S., Machado, S., & Febbo, M. (2022). An analytical model of the electromechanical coupling for a piezoelectric stepped buckled beam for energy harvesting applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 179, 109355. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109355>
- Wang, C. M., & Wang, C. Y. (2004). Exact solutions for buckling of structural members. CRC press. <https://doi.org/10.1201/9780203483534>